Editora Bernoulli

MATEMÁTICA

Volume 03

Sumário - Matemática

MATEMÁTICA

Porcentagem

MÓDULO 05 FRENTE A

PORCENTAGEM

Porcentagem, ou percentagem, é uma fração cujo denominador é igual a 100. Por exemplo, "sete por cento" é representado como 7%, e equivale à fração $\frac{7}{100}$.

O conceito de porcentagem é um dos mais utilizados no dia a dia, como para efetuar comparações com valores dados. Por exemplo, vamos supor que uma prestação de R$ 500,00 irá sofrer um reajuste de 30%. Em termos matemáticos, escrevemos:

$$30\% \text{ de } 500 = \frac{30}{100}.500 = 150$$

Assim, a nova prestação será igual a R$ 650,00.

Podemos dizer também que, ao calcularmos a porcentagem em relação a um valor dado, estamos representando uma proporção, na qual um dos denominadores é igual a 100. Desse modo, no exemplo dado, dizemos que o valor de 150 representa em 500 o mesmo que o valor 30 representa em 100.

$$\frac{150}{500} = \frac{30}{100}$$

OBSERVAÇÃO

Há três modos de representar uma porcentagem: na forma percentual, na forma fracionária ou na forma decimal. Vejamos alguns exemplos:

Forma percentual	Forma fracionária	Forma decimal
20%	$\frac{20}{100}$	0,2
5%	$\frac{5}{100}$	0,05
1,3%	$\frac{1,3}{100}$	0,013

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUC Minas) Certa cidade tem 18 500 eleitores. Na eleição para prefeito, houve 6% de abstenção entre os homens e 9% entre as mulheres; com isso, o número de votantes do sexo masculino ficou exatamente igual ao número de votantes do sexo feminino. Pode-se afirmar que o número de eleitores do sexo feminino, nessa cidade, é

A) 7 200

B) 8 500

C) 9 250

D) 9 400

Resolução:

Sejam:

H: Total de eleitores do sexo masculino;

M: Total de eleitores do sexo feminino.

Temos H + M = 18 500.

Além disso, temos 0,94H votantes do sexo masculino e 0,91M votantes do sexo feminino.

Temos 0,94H = 0,91M.

Portanto, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} H + M = 18\,500 \\ 0,94H = 0,91M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H + M = 18\,500 \\ 94H - 91M = 0 \end{cases}$$

Substituindo H = 18 500 – M na segunda equação, temos:

$94(18\,500 - M) - 91M = 0 \Rightarrow 1\,739\,000 - 94M - 91M = 0 \Rightarrow$

$185M = 1\,739\,000 \Rightarrow M = 9\,400$

AUMENTOS E DESCONTOS SUCESSIVOS

Aumentos sucessivos

A título de exemplo, vamos imaginar que o preço de uma mercadoria seja igual a **P** reais. Qual será o novo preço após um aumento de R$ 10%?

Nesse caso, temos que 10% de P = 0,1.P.

Portanto, o novo preço será igual a P + 0,1P = 1,1P.

Observe que o preço após o aumento também pode ser obtido simplesmente multiplicando-se o preço anterior **P** por 1,1. Esse artifício é muito útil para solucionarmos problemas envolvendo aumentos sucessivos.

Exemplo

Um vendedor resolveu promover dois reajustes sucessivos de 5% no preço de uma mercadoria. Isso equivale a um só aumento de

A) 10%.
B) 10,25%.
C) 11%.
D) 12%.

Resolução:

Seja **P** o preço da mercadoria. A cada aumento de 5%, multiplicamos **P** por 1,05. Temos:

$$\underbrace{1{,}05.P}_{\text{Preço após o primeiro aumento}}$$

$$\underbrace{1{,}05.(1{,}05.P)}_{\text{Preço após o segundo aumento}} = 1{,}1025.P$$

1,1025.P – P = 0,1025.P, o que equivale a um só aumento de 10,25%.

Descontos sucessivos

De maneira análoga à utilizada no caso dos aumentos sucessivos, vamos imaginar que o preço **P** da mercadoria sofreu um desconto de 30%. Qual será o preço após esse desconto?

Temos 30% de P = 0,3.P.

O novo preço é dado por P – 0,3.P= 0,7.P.

Observe que o preço após o desconto é dado pela multiplicação do preço **P** por 0,7.

Exemplo

Um eletrodoméstico teve seu preço reduzido em 15%. Tendo atraído poucos compradores, o comerciante resolveu dar um novo desconto, dessa vez de 10%. Em relação ao preço original, qual foi o desconto total dado pelo comerciante?

Resolução:

Seja **P** o preço original dessa mercadoria. Temos:

$$\underbrace{0{,}85.P}_{\text{Preço após a redução de 15\%}}$$

$$\underbrace{0{,}9.(0{,}85.P)}_{\text{Preço após a redução de 10\%}} = 0{,}765.P$$

Observe que P – 0,765.P = 0,235.P, o que significa que houve um desconto total de 23,5%.

Lucro

Considere um determinado produto vendido por um comerciante por um preço de venda **V**. Suponhamos que esse comerciante tenha adquirido tal produto no atacado a um preço de custo **C**. Definimos como lucro o valor efetivamente recebido pelo comerciante, descontado o custo de aquisição. Em termos algébricos, temos:

L = V – C

Em que:

L: lucro por unidade vendida;

V: valor arrecadado com a venda;

C: custo de aquisição do produto.

Em muitos problemas, deseja-se saber a porcentagem correspondente a esse lucro, normalmente em função do custo. Porém, em algumas situações, tal porcentagem pode ser calculada em função do preço de venda.

Exemplo

Um comerciante obteve um lucro de 30% sobre o preço de custo de um determinado produto. Qual foi a porcentagem do lucro sobre o preço de venda desse mesmo produto?

Resolução:

Sejam:

L: lucro por unidade vendida;

V: preço de venda do produto;

C: preço de custo do produto.

Temos L = V – C. (I)

Mas L = 0,3 C.

Portanto, $C = \frac{L}{0{,}3} = \frac{10L}{3}$.

Substituindo em (I), temos:

$$L = V - \frac{10}{3}.L \Rightarrow L + \frac{10}{3}.L = V \Rightarrow \frac{13L}{3} = V \Rightarrow$$

$$L = \frac{3}{13}.V \approx 0{,}23.V$$

Portanto, o lucro é de cerca de 23% sobre o preço de venda.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFLA-MG–2006) Um motorista escolhe um trajeto que sabe ser 20% maior que o trajeto que usualmente toma, pois nesse novo trajeto poderá desenvolver uma velocidade média 100% maior que a do trajeto usual. O tempo de viagem diminuirá

A) 40%. B) 50%. C) 100%. D) 9%. E) 20%.

02. (FUVEST-SP) Um lojista sabe que, para não ter prejuízo, o preço de venda de seus produtos deve ser no mínimo 44% superior ao preço de custo. Porém, ele prepara a tabela de preços de venda acrescentando 80% ao preço de custo, porque sabe que o cliente gosta de obter desconto no momento da compra. Qual é o **MAIOR** desconto que ele pode conceder ao cliente, sobre o preço da tabela, de modo a não ter prejuízo?

A) 10% B) 15% C) 20% D) 25% E) 36%

03. (UFMG–2008) Após se fazer uma promoção em um clube de dança, o número de frequentadores do sexo masculino aumentou de 60 para 84 e, apesar disso, o percentual da participação masculina passou de 30% para 24%. Considerando-se essas informações, é **CORRETO** afirmar que o número de mulheres que frequentam esse clube, após a promoção, teve um aumento de

A) 76%. B) 81%. C) 85%. D) 90%.

04. (UFF-RJ) A confeitaria Cara Melada é conhecida por suas famosas balas de leite, vendidas em pacotes. No Natal, essa confeitaria fez a seguinte promoção: colocou, em cada pacote, 20% a mais de balas e aumentou em 8% o preço do pacote. **DETERMINE** a variação, em porcentagem, que essa promoção acarretou no preço de cada bala do pacote.

05. (Mackenzie-SP) Uma pessoa pagou 20% de uma dívida. Se R$ 4 368,00 correspondem a 35% do restante a ser pago, então a dívida total inicial era de

A) R$ 10 200,00.
B) R$ 11 400,00.
C) R$ 15 600,00.
D) R$ 16 800,00.
E) R$ 18 100,00.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFG) O jovem Israel trabalha em uma sapataria. Ele gasta do seu salário: 25% no pagamento do aluguel da pequena casa onde mora; $\frac{1}{10}$ na compra de vale-transporte; 15% na prestação do aparelho de TV que adquiriu; e ainda lhe sobram R$ 84,00. Qual é o salário de Israel?

02. (FUVEST-SP) A cada ano que passa, o valor de um carro diminui 30% em relação ao seu valor anterior. Se **v** for o valor do carro no primeiro ano, o seu valor no oitavo ano será

A) $(0,7)^7$v.
B) $(0,3)^7$v.
C) $(0,7)^8$v.
D) $(0,3)^8$v.
E) $(0,3)^9$v.

03. (Unicamp-SP) Uma pessoa investiu R$ 3 000,00 em ações. No primeiro mês, ela perdeu 40% do total investido, e no segundo mês ela recuperou 30% do que havia perdido.

A) Com quantos reais ela ficou após os dois meses?
B) Qual foi seu prejuízo após os dois meses, em porcentagem, sobre o valor do investimento inicial?

04. (UFPE) Um investidor resolveu empregar todo o seu capital da seguinte forma: metade em caderneta de poupança, que lhe rendeu 30% ao ano. Um terço na bolsa de valores, que lhe rendeu 45% no mesmo período. O restante, ele aplicou em fundos de investimento, que lhe renderam 24% ao ano. Ao término de um ano, o capital desse investidor aumentou em

A) 33%.
B) 38%.
C) 34%.
D) 32%.
E) 36%.

05. (UFG–2006) Uma empresa gastava 15% de sua receita com o pagamento de contas telefônica e de energia elétrica. Para reduzir despesas, determinou-se um corte de 50% na conta telefônica. Essa iniciativa produziu uma economia de R$ 1 000,00, o que corresponde a 5% de sua receita. Tendo em vista essas condições, **CALCULE** o gasto dessa empresa com energia elétrica.

06. (FUVEST-SP) Um reservatório, com 40 litros de capacidade, já contém 30 litros de uma mistura gasolina / álcool com 18% de álcool. Deseja-se completar o tanque com uma nova mistura gasolina / álcool de modo que a mistura resultante tenha 20% de álcool. A porcentagem de álcool nessa nova mistura deve ser de

A) 20%.
B) 22%.
C) 24%.
D) 26%.
E) 28%.

07. (FUVEST-SP) Um comerciante deu um desconto de 20% sobre o preço de venda de uma mercadoria e, mesmo assim, conseguiu um lucro de 20% sobre o preço que pagou pela mesma. Se o desconto não fosse dado, seu lucro, em porcentagem, seria

A) 40.
B) 45.
C) 50.
D) 55.
E) 60.

08. (UFPE) Quando o preço da unidade de determinado produto diminuiu 10%, o consumo aumentou 20% durante certo período. No mesmo período, de que percentual aumentou o faturamento da venda desse produto?

A) 8%
B) 10%
C) 12%
D) 15%
E) 30%

09. (UFU-MG) Uma loja de artigos para presente sempre colocou seus produtos à venda aplicando 50% a mais sobre o preço de custo. No entanto, devido à recessão, ela anunciou uma liquidação com 20% de desconto sobre todos os produtos para pagamentos à vista. Nesse caso, o lucro da loja na venda à vista de cada produto foi de

A) 10%.
B) 30%.
C) 20%.
D) 40%.

10. (UFV-MG) Uma empresa concedeu aos seus funcionários um reajuste salarial de 60% em duas etapas. Em agosto, 40% sobre o salário de julho e, em outubro, mais 20% sobre o salário de julho. Quanto este último reajuste representou em relação ao salário de setembro?

11. (UFU-MG) No mês de agosto, Pedro observou que o valor da sua conta de energia elétrica foi 50% superior ao valor da sua conta de água. Em setembro, tanto o consumo de energia elétrica quanto o de água, na residência de Pedro, foram iguais aos consumos do mês de agosto. Porém, como as tarifas de água e de energia elétrica foram reajustadas em 10% e 20%, respectivamente, Pedro desembolsou R$ 20,00 a mais do que em agosto para quitar as duas contas. Quanto Pedro pagou de energia elétrica no mês de setembro?

12. (Mackenzie-SP) Numa loja, para um determinado produto, a diferença entre o preço de venda solicitado e o preço de custo é 3 000. Se esse produto for vendido com 20% de desconto, ainda assim dará um lucro de 30% à loja. Então, a soma dos preços de venda e de custo é

A) 13 200
B) 14 600
C) 13 600
D) 12 600
E) 16 400

13. (UEL-PR) Em uma liquidação, os preços dos artigos de uma loja são reduzidos de 20% de seu valor. Terminada a liquidação e pretendendo voltar aos preços originais, de que porcentagem devem ser acrescidos os preços da liquidação?

A) 27,5%
B) 25%
C) 22,5%
D) 21%
E) 20%

14. (FUVEST-SP) Sobre o preço de um carro importado incide um imposto de importação de 30%. Em função disso, seu preço para o importador é de R$ 19 500,00. Supondo que tal imposto passe de 30% para 60%, qual será, em reais, o novo preço do carro para o importador?

A) R$ 22 500,00
B) R$ 24 000,00
C) R$ 25 350,00
D) R$ 31 200,00
E) R$ 39 000,00

15. (Mackenzie-SP) Num grupo de 200 pessoas, 80% são brasileiros. O número de brasileiros que deve abandonar o grupo, para que 60% das pessoas restantes sejam brasileiras, é

A) 90 B) 95 C) 100 D) 105 E) 110

16. (UFES) Um empregado recebe um salário mensal para trabalhar 8 horas diárias. Trabalhando 2 horas extras todo dia, ele tem um acréscimo de 50% em seu salário. Quanto ele ganha a mais por hora extra?

A) 50%
B) 60%
C) 80%
D) 100%
E) 120%

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2002) A capa de uma revista de grande circulação trazia a seguinte informação, relativa a uma reportagem daquela edição:

"O brasileiro diz que é feliz na cama, mas debaixo dos lençóis 47% não sentem vontade de fazer sexo."

O texto a seguir, no entanto, adaptado da mesma reportagem, mostra que o dado anterior está errado:

"Outro problema predominantemente feminino é a falta de desejo: 35% das mulheres não sentem nenhuma vontade de ter relações. Já entre os homens, apenas 12% se queixam de falta de desejo."

Considerando que o número de homens na população seja igual ao de mulheres, a porcentagem aproximada de brasileiros que não sentem vontade de fazer sexo, de acordo com a reportagem, é

A) 12%. B) 24%. C) 29%. D) 35%. E) 50%.

02. (Enem–2000) O Brasil, em 1997, com cerca de 160×10^6 habitantes, apresentou um consumo de energia da ordem de 250 000 tep (tonelada equivalente de petróleo), proveniente de diversas fontes primárias. O grupo com renda familiar de mais de vinte salários mínimos representa 5% da população brasileira e utiliza cerca de 10% da energia total consumida no país. O grupo com renda familiar de até três salários mínimos representa 50% da população e consome 30% do total de energia. Com base nessas informações, pode-se concluir que o consumo médio de energia para um indivíduo do grupo de renda superior é **x** vezes maior do que para um indivíduo do grupo de renda inferior. O valor aproximado de **x** é

A) 2,1 B) 3,3 C) 6,3 D) 10,5 E) 12,7

03. (Enem–2001) Segundo um especialista em petróleo (*Estado de S. Paulo*, 5 mar. 2000), o consumo total de energia mundial foi estimado em 8,3 bilhões de toneladas equivalentes de petróleo (tep) para 2001. A porcentagem das diversas fontes da energia consumida no globo é representada no gráfico.

Segundo as informações apresentadas, para substituir a energia nuclear utilizada, é necessário, por exemplo, aumentar a energia proveniente do gás natural em cerca de

A) 10%.
B) 18%.
C) 25%.
D) 33%.
E) 50%.

04. (Enem–2001) O consumo total de energia nas residências brasileiras envolve diversas fontes, como eletricidade, gás de cozinha, lenha, etc. O gráfico mostra a evolução do consumo de energia elétrica residencial, comparada com o consumo total de energia residencial, de 1970 a 1995.

**tep = toneladas equivalentes de petróleo*

Fonte: Valores calculados através dos dados obtidos de: http://infoener.iee.usp.br/1999.

Verifica-se que a participação percentual da energia elétrica no total de energia gasto nas residências brasileiras cresceu entre 1970 e 1995, passando, aproximadamente, de

A) 10% para 40%.
B) 10% para 60%.
C) 20% para 60%.
D) 25% para 35%.
E) 40% para 80%.

05. (Enem–2001) Nas últimas eleições presidenciais de um determinado país, onde 9% dos eleitores votaram em branco e 11% anularam o voto, o vencedor obteve 51% dos votos válidos. Não são considerados válidos os votos em branco e nulos. Pode-se afirmar que o vencedor, de fato, obteve de todos os eleitores um percentual de votos da ordem de

A) 38%. B) 41%. C) 44%. D) 47%. E) 50%.

06. (Enem–2001) Em um colégio, 40% da arrecadação das mensalidades correspondem ao pagamento dos salários dos seus professores. A metade dos alunos desse colégio é de estudantes carentes, que pagam mensalidades reduzidas. O diretor propôs um aumento de 5% nas mensalidades de todos os alunos para cobrir os gastos gerados por reajuste de 5% na folha de pagamento dos professores. A associação de pais e mestres concorda com o aumento nas mensalidades, mas não com o índice proposto. Pode-se afirmar que

A) o diretor fez um cálculo incorreto e o reajuste proposto nas mensalidades não é suficiente para cobrir os gastos adicionais.
B) o diretor fez os cálculos corretamente e o reajuste nas mensalidades que ele propôs cobrirá exatamente os gastos adicionais.
C) a associação está correta em não concordar com o índice proposto pelo diretor, pois a arrecadação adicional baseada nesse índice superaria em muito os gastos adicionais.
D) a associação, ao recusar o índice de reajuste proposto pelo diretor, não levou em conta o fato de alunos carentes pagarem mensalidades reduzidas.
E) o diretor deveria ter proposto um reajuste maior nas mensalidades, baseado no fato de que a metade dos alunos paga mensalidades reduzidas.

07. (Enem–2003) A eficiência de anúncios num painel eletrônico localizado em uma certa avenida movimentada foi avaliada por uma empresa. Os resultados mostraram que, em média:

– Passam, por dia, 30 000 motoristas em frente ao painel eletrônico;
– 40% dos motoristas que passam observam o painel;
– Um mesmo motorista passa três vezes por semana pelo local.

Segundo os dados anteriores, se um anúncio de um produto ficar exposto durante sete dias nesse painel, é esperado que o número mínimo de motoristas diferentes que terão observado o painel seja

A) 15 000
B) 28 000
C) 42 000
D) 71 000
E) 84 000

08. (Enem–2003) O tabagismo (vício em fumo) é responsável por uma grande quantidade de doenças e mortes prematuras na atualidade. O Instituto Nacional do Câncer divulgou que 90% dos casos diagnosticados de câncer de pulmão e 80% dos casos diagnosticados de enfisema pulmonar estão associados ao consumo de tabaco. Paralelamente, foram mostrados os resultados de uma pesquisa realizada em um grupo de 2 000 pessoas com doenças de pulmão, das quais 1 500 são casos diagnosticados de câncer, e 500 são casos diagnosticados de enfisema. Com base nessas informações, pode-se estimar que o número de fumantes desse grupo de 2 000 pessoas é, aproximadamente,

A) 740
B) 1 100
C) 1 310
D) 1 620
E) 1 750

09. (Enem–2004) Uma pesquisa sobre orçamentos familiares, realizada recentemente pelo IBGE, mostra alguns itens de despesa na distribuição de gastos de dois grupos de famílias com rendas mensais bem diferentes.

Tipo de despesa	Renda de até R$ 400,00	Renda maior ou igual a R$ 6 000,00
Habitação	37%	23%
Alimentação	33%	9%
Transporte	8%	17%
Saúde	4%	6%
Educação	0,3%	5%
Outros	17,7%	40%

Considere duas famílias com rendas de R$ 400,00 e R$ 6 000,00, respectivamente, cujas despesas variam de acordo com os valores das faixas apresentadas. Nesse caso, os valores, em R$, gastos com alimentação pela família de maior renda, em relação aos da família de menor renda, são, aproximadamente,

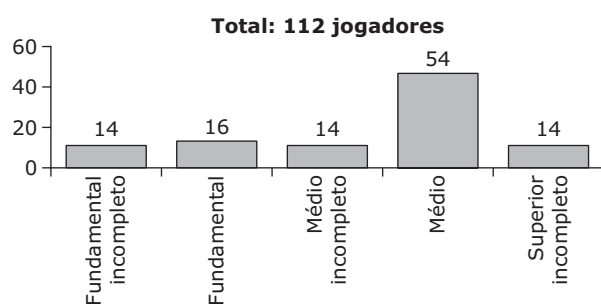
A) dez vezes maiores.

B) quatro vezes maiores.

C) equivalentes.

D) três vezes menores.

E) nove vezes menores.

10. (Enem–2005) A escolaridade dos jogadores de futebol nos grandes centros é maior do que se imagina, como mostra a pesquisa a seguir, realizada com os jogadores profissionais dos quatro principais clubes de futebol do Rio de Janeiro.

O GLOBO, 24 jul. 2005.

De acordo com esses dados, o percentual dos jogadores dos quatro clubes que concluíram o Ensino Médio é de, aproximadamente,

A) 14%.

B) 48%.

C) 54%.

D) 60%.

E) 68%.

GABARITO

Fixação

01. A
02. C
03. D
04. Redução de 10% no preço de cada bala.
05. C

Propostos

01. R$ 168,00
02. A
03. A) R$ 2 160,00
    B) 28%
04. C
05. R$ 1 000,00
06. D
07. C
08. A
09. C
10. 14,3%
11. R$ 90,00
12. D
13. B
14. B
15. C
16. D

Seção Enem

01. B
02. B
03. D
04. B
05. B
06. C
07. B
08. E
09. B
10. D

MATEMÁTICA

Juros simples e compostos

MÓDULO 06 FRENTE A

JUROS

Chamamos de juros a remuneração pelo uso de um certo capital aplicado por um determinado período. Por exemplo, suponhamos que uma pessoa adquira um empréstimo no valor de R$ 1 000,00, a ser pago em 30 dias. O credor, a título de compensação pelo tempo em que ficará sem o seu dinheiro, resolveu cobrar uma taxa de 5% do valor total. Esse percentual é chamado de juro dessa operação.

Há dois regimes básicos de juros: juros simples e juros compostos.

Juros simples

Em um regime de juros simples, a taxa de juros é calculada apenas em relação à quantidade inicial. Por exemplo, vamos imaginar que uma pessoa aplique um capital **C** a uma taxa de juros simples de 4% ao mês. Qual será o valor total que essa pessoa possuirá ao final de cinco meses?

Temos que 4% de C = 0,04.C. A cada mês, a pessoa ganhará esse valor. Ao final de 5 meses, essa pessoa terá ganhado, de juros, 5.0,04.C = 0,2C. A quantia total que essa pessoa possui, denominada *montante*, é dada por C + 0,2C = 1,2C.

De maneira geral, os juros simples **J**, obtidos em uma aplicação de um capital **C**, durante um determinado período **t**, a uma taxa de juros **i**, são dados por:

$$J = C.i.t$$

OBSERVAÇÕES

- A taxa de juros **i** é dada na forma decimal. Por exemplo, se a taxa de juros é 3%, então i = 0,03.
- É fundamental que a taxa de juros **i** e o período **t** estejam em unidades compatíveis. Por exemplo, se temos uma taxa de 10% ao mês, é conveniente que o tempo na expressão seja representado em meses.

O montante **M** dessa aplicação é dado pela soma do capital inicial com os juros obtidos.

$$M = C + J$$

Juros compostos

Em um regime de juros compostos, a taxa de juros é calculada sobre o valor atualizado do capital, incidindo sobre a quantia do período imediatamente anterior. Essa é a modalidade de juros mais utilizada nas transações comerciais.

Vamos supor que uma pessoa tome emprestada uma quantia **C**, a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, durante três meses. Ao final desse período, qual será o valor total (montante) pago por essa pessoa?

Nesse caso, a taxa de juros incide sobre o valor atualizado. Portanto, trata-se de três aumentos sucessivos de 2%. Logo, o montante é igual a $1,02^3.C = 1,061.C$.

De modo geral, o montante **M** da aplicação de um capital **C**, a uma taxa de juros compostos **i**, por um período **t**, é dado pela expressão:

$$M = C.(1+i)^t$$

Em que **i** é dada na forma decimal.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Um produto é vendido em uma loja a R$ 200,00 à vista ou em duas parcelas de R$ 110,00, sendo uma parcela no ato da compra e outra após 30 dias. Se um consumidor optar pela compra a prazo, qual será a taxa de juros mensal cobrada pela loja?

Resolução:

O preço à vista é igual a 200 reais. Se subtrairmos desse valor a entrada de 110 reais, o saldo devedor fica igual a 90 reais. Porém, após 30 dias, o consumidor irá pagar 110 reais (segunda parcela). Observe que ele está pagando 110 – 90 = 20 reais acima do valor devido. Esse valor é devido aos juros, que devem ser calculados em relação ao valor financiado, ou seja, 90 reais.

90 —— 100%

20 —— x

x = 22,22%

02. (UFMG) Um consumidor adquiriu determinado produto em um plano de pagamento de 12 parcelas mensais iguais de R$ 462,00, a uma taxa de juros de 5% ao mês. Ele pagou as 10 primeiras prestações no dia exato do vencimento de cada uma delas. Na data do vencimento da 11ª prestação, o consumidor decidiu quitar a última também, para liquidar sua dívida. Ele exigiu, então, que a última prestação fosse recalculada, para a retirada dos juros correspondentes ao mês antecipado, no que foi atendido. Depois de recalculado, o valor da última prestação passou a ser de

A) R$ 438,90.

B) R$ 441,10.

C) R$ 440,00.

D) R$ 444,00.

Resolução:

Desejamos retirar os juros referentes à última parcela. Observe que cada parcela teve seu valor original aumentado em 5%. Seja **P** a parcela sem juros. Temos:

$$1,05.P = 462 \Rightarrow P = \frac{462}{1,05} = 440 \text{ reais}$$

03. (UFMT) Uma financiadora oferece empréstimo por um período de 4 meses, sob as seguintes condições:

I) Taxa de 11,4% ao mês, a juros simples;

II) Taxa de 10% ao mês, a juros compostos.

Uma pessoa fez um empréstimo de R$ 10 000,00 optando pela condição I. Em quantos reais os juros cobrados pela condição I serão menores do que os cobrados pela condição II?

Resolução:

Juros cobrados na condição I:

J = 10 000.0,114.4 = 4 560 reais

Juros cobrados na condição II:

$M = 10\,000.(1 + 0,1)^4 = 10\,000.1,1^4 = 10\,000.1,4641 = 14\,641$

J = 14 641 – 10 000 = 4 641 reais

A diferença é dada por 4 641 – 4 560 = 81.

Portanto, os juros da condição I serão menores em R$ 81,00.

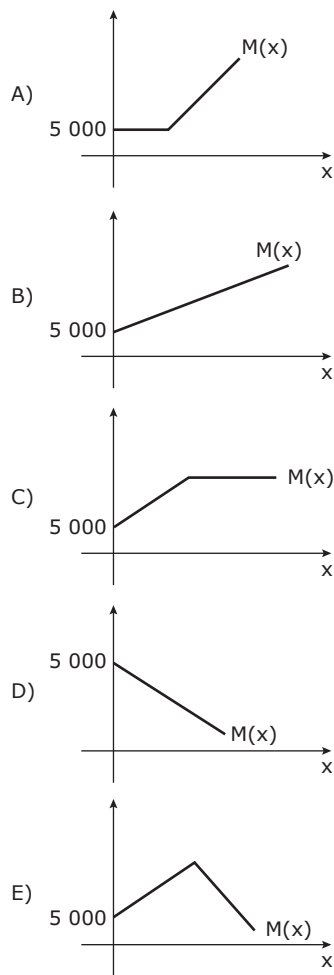
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFOP-MG–2009) Uma loja vende seus produtos com duas opções de pagamento: à vista, com 10% de desconto, ou em duas prestações mensais iguais sem desconto, sendo a primeira paga no ato da compra. Dessa forma, a taxa mensal de juros embutida na venda a prazo é de

A) 5%. B) 10%. C) 20%. D) 25%.

02. (UFJF-MG) As promoções do tipo "Leve 5 e pague 4", quando feitas de modo que o cliente ganhe de fato um produto, dão um desconto, sobre cada unidade vendida, de

A) 6,2%. B) 10%. C) 20%. D) 25%. E) 30%.

03. (Unifor-CE–2011) Pedro, aluno do curso de Engenharia da Universidade de Fortaleza, emprestou R$ 5 000,00 ao seu colega de classe, Marcos, a uma taxa de juros simples de 3% ao mês. Considerando **x** o número de meses do empréstimo e M(x) o montante a ser devolvido para Pedro, no final do empréstimo, podemos afirmar que a representação gráfica que **MELHOR** representa M(x) é

04. (FGV–2010) No início do ano 2000, Alberto aplicou certa quantia a juros compostos, ganhando 20% ao ano. No início de 2009, seu montante era de R$ 5 160,00. Se ele deixar o dinheiro aplicado, nas mesmas condições, o juro recebido entre o início de 2010 e o início de 2011 será, aproximadamente, de

A) R$ 1 032,00.

B) R$ 1 341,00.

C) R$ 1 238,00.

D) R$ 1 135,00.

E) R$ 929,99.

05. (Unicamp-SP) Suponha que todos os preços venham subindo 30% ao mês nos últimos meses, e continuem nos próximos meses. **CALCULE**:

A) Quanto custará, daqui a 60 dias, um objeto que hoje custa R$ 27 300,00?

B) Quanto custava esse mesmo objeto há um mês?

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UNESP) As promoções do tipo "Leve 3 e pague 2", comuns no comércio, acenam com um desconto, sobre cada unidade vendida, de

A) $\frac{50}{3}$%.

B) 20%.

C) 25%.

D) 30%.

E) $\frac{100}{3}$%.

02. (UFMG–2009) No período de um ano, certa aplicação financeira obteve um rendimento de 26%. No mesmo período, porém, ocorreu uma inflação de 20%. Então, é **CORRETO** que o rendimento efetivo da referida aplicação foi de

A) 3%.

B) 5%.

C) 5,2%.

D) 6%.

03. (CEFET-MG–2011) Num consórcio de 30 mil reais, a ser pago em 25 prestações mensais fixas e sem juros, uma pessoa oferecerá como lance inicial um valor que será abatido dos 30 mil reais. Essa quantia inicial, emprestada por seu irmão, deverá ser devolvida em parcelas fixas durante os mesmos 25 meses, com taxa de 25% sobre o empréstimo. Para que a prestação total, a ser paga por essa pessoa, não ultrapasse R$ 1 300 mensais, ela poderá dar como lance o percentual **MÁXIMO** do valor do consórcio de, aproximadamente,

A) 17%.

B) 26%.

C) 33%.

D) 42%.

E) 54%.

04. (FUVEST-SP–2011) Uma geladeira é vendida em **n** parcelas iguais, sem juros. Caso se queira adquirir o produto, pagando-se 3 ou 5 parcelas a menos, ainda sem juros, o valor de cada parcela deve ser acrescido de R$ 60,00 ou de R$ 125,00, respectivamente. Com base nessas informações, conclui-se que o valor de **n** é igual a

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

05. (Unimontes-MG–2010) A sapataria "Pé Bonito" está dando 20% de desconto na compra à vista e, na compra com cheque para 30 dias, preço normal, sem juros. Se o cliente escolher fazer o pagamento com cheque para 30 dias, estará, na verdade, pagando juros de

A) 25%.

B) 20%.

C) 24%.

D) 0%.

06. (FJP-MG–2010) João contratou um empréstimo no valor de R$ 8 000,00 que deverá ser pago em duas parcelas. A primeira parcela, no valor de R$ 5 512,50, deverá ser paga em 60 dias. A segunda parcela deverá ser paga em 90 dias. Se a taxa de juros contratada foi de 5% ao mês, com capitalização mensal, então o valor da segunda parcela deverá ser

A) R$ 2 879,59.

B) R$ 3 450,00.

C) R$ 3 459,71.

D) R$ 3 472,87.

07. (UNESP–2010) Desejo ter, para minha aposentadoria, 1 milhão de reais. Para isso, faço uma aplicação financeira, que rende 1% de juros ao mês, já descontados o imposto de renda e as taxas bancárias recorrenntes. Se desejo me aposentar após 30 anos com aplicações mensais fixas e ininterruptas nesse investimento, o valor aproximado, em reais, que devo disponibilizar mensalmente é

Dado: $1{,}01^{361} \approx 36$

A) 290,00

B) 286,00

C) 282,00

D) 278,00

E) 274,00

08. (UFPE–2009) Uma loja vende uma televisão em duas prestações; a primeira, de R$ 1 650,00, a ser paga um mês após a compra, e a segunda, de R$ 1 815,00, a ser paga dois meses após a compra. Se a loja cobra juros mensais cumulativos de 10% ao mês, qual o preço da televisão à vista?

A) R$ 3 000,00

B) R$ 3 100,00

C) R$ 3 200,00

D) R$ 3 300,00

E) R$ 3 400,00

09. (UFPE–2009) Um produto podia ser comprado, há algum tempo atrás, por 80% do seu valor atual. Qual o aumento percentual sofrido pelo preço do produto neste período de tempo?

A) 20%

B) 23%

C) 24%

D) 25%

E) 28%

10. (FGV-SP–2009) Roberto estima que, daqui a dois anos, o preço de um carro seja R$ 46 200,00. Para poder comprar o carro à vista, daqui a dois anos, ele deposita hoje **x** reais e depositará mais **x** reais daqui a um ano, num fundo que rende 10% ao ano a juros compostos, de modo que tenha exatamente esse valor (R$ 46 200,00) daqui a dois anos. O valor de **x** é um número cuja soma dos algarismos da parte inteira é igual a

A) 5 B) 4 C) 2 D) 3 E) 6

11. (CEFET-MG–2009) O COPOM (Comitê de Política Monetária do Banco Central) anunciou nesta quarta-feira uma nova redução na taxa básica de juros, a Selic, que caiu de 11,25% aa para 10,25% aa, o menor patamar da história. Trata-se da terceira redução seguida da taxa básica, que estava em 13,75% aa em janeiro de 2009.

Disponível em: <http://www1.folha.uol.com.br/folha/dinheiro/ult91u558077.shtml>. Acesso em: 29 abr. 2009 (Adaptação).

Duas pessoas aplicaram R$ 10 000,00 em um investimento com capitalização composta, taxa de juros Selic e tempo de 1 ano. Ana fez a aplicação em janeiro de 2009, e Pedro, em maio de 2009. Ao final de cada investimento, é **CORRETO** afirmar que

A) Pedro teve montante 2,5% maior que o de Ana.
B) Ana recebeu um montante 4% maior que o de Pedro.
C) a soma dos montantes de Pedro e Ana supera R$ 25 000,00.
D) a diferença entre os dois montantes foi de 3,5% do valor aplicado individualmente.
E) a diferença entre os valores recebidos por Ana e Pedro foi de R$ 100,00 a favor de Ana.

12. (FUVEST–2008) No próximo dia 08/12, Maria, que vive em Portugal, terá um saldo de 2 300 euros em sua conta corrente, e uma prestação a pagar no valor de 3 500 euros, com vencimento nesse dia. O salário dela é suficiente para saldar tal prestação, mas será depositado nessa conta corrente apenas no dia 10/12. Maria está considerando duas opções para pagar a prestação:

1. Pagar no dia 8. Nesse caso, o banco cobrará juros de 2% ao dia sobre o saldo negativo diário em sua conta corrente, por dois dias;
2. Pagar no dia 10. Nesse caso, ela deverá pagar uma multa de 2% sobre o valor total da prestação.

Suponha que não haja outras movimentações em sua conta corrente. Se Maria escolher a opção 2, ela terá, em relação à opção 1,

A) desvantagem de 22,50 euros.
B) vantagem de 22,50 euros.
C) desvantagem de 21,52 euros.
D) vantagem de 21,52 euros.
E) vantagem de 20,48 euros.

13. (UFSJ-MG–2008) A partir de dados econômicos divulgados na imprensa no dia 20 de julho de 2007, admite-se que, nos últimos 12 meses, o rendimento médio de aplicações na Bolsa de Valores de São Paulo, a IBOVESPA, foi de 17,3%, e que o rendimento da caderneta de poupança, no mesmo período, foi de 3,3%. Um certo investidor aplicou R$ 1 000,00 na bolsa e este mesmo valor na caderneta de poupança, durante um período de dois anos. Sob o regime anual de juros compostos, considerando-se que essas instituições não fazem arredondamento dos rendimentos e não se levando em conta outros fatores, a diferença de rendimentos nessas duas aplicações, ao final do período de aplicação, em reais, será igual a

A) 168,84
B) 308,84
C) 140
D) 280

14. (FJP-MG–2008) Dois capitais, C_1 e C_2, foram aplicados no mesmo dia e à mesma taxa de 5% ao mês, com os juros capitalizados (isto é, somados ao capital) mensalmente. Os montantes, obtidos ao final de 3 e 4 meses, respectivamente, foram iguais. A soma desses capitais, sabendo-se que a diferença entre eles é de R$ 1 000,00,

A) é menor que R$ 16 000,00.
B) está entre R$ 16 000,00 e R$ 27 600,00.
C) está entre R$ 27 600,00 e R$ 32 400,00.
D) é maior que R$ 32 400,00.

15. (Unifor-CE–2008) Um capital de R$ 250 000,00 foi aplicado em um regime de capitalização composta e ao final de 2 anos foi retirado o montante de R$ 518 400,00. A taxa anual dessa aplicação foi de

A) 44%.
B) 42,5%.
C) 42%.
D) 40,5%.
E) 40%.

16. (FGV-SP–2008) João divide suas economias e as aplica em dois fundos: **A** e **B**. No primeiro mês, o fundo **A** rendeu 50% e o fundo **B**, 30%. No segundo mês, ambos renderam 20%. Se a rentabilidade que João obteve no bimestre foi de 63,2%, que porcentagem de sua economia foi aplicada no fundo **B**?

A) 50%
B) 60%
C) 40%
D) 70%
E) 30%

17. (FGV-SP–2008) Certo automóvel vale hoje $ 10 000,00 e seu valor diminui 20% por ano. Carlos tem hoje uma poupança de $ 5 000,00 aplicada com um rendimento de 10% ao ano. Quanto faltará para Carlos comprar esse mesmo automóvel daqui a dois anos?

A) $ 2 000,00

B) $ 1 000,00

C) $ 0,00

D) $ 700,00

E) $ 350,00

18. (FGV-SP–2008) João comprou uma geladeira e pagou em duas parcelas iguais de $ 525,00. A primeira parcela foi paga à vista e a segunda, após um mês. Sabendo que a loja cobra juros de 5% ao mês sobre o saldo devedor, o preço da geladeira à vista era

A) $ 1 010,00.

B) $ 1 025,00.

C) $ 1 015,00.

D) $ 1 050,00.

E) $ 1 020,00.

19. (FGV-SP–2009) Ao investir todo mês o montante de R$ 1 200,00 em uma aplicação financeira, o investidor notou que imediatamente após o terceiro depósito, seu montante total era de R$ 3 900,00. A taxa mensal de juros dessa aplicação, em regime de juros compostos, é

A) $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$

B) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

C) $\frac{\sqrt{10}-3}{2}$

D) $\frac{\sqrt{11}-3}{3}$

E) $\frac{2\sqrt{3}-3}{2}$

20. (Unimontes-MG–2009) Uma mercadoria, que custa R$ 50,00 à vista, é adquirida a prazo, com uma entrada de R$ 30,00 mais uma parcela de R$ 25,00 com 30 dias de prazo. A taxa de juros mensal, cobrada nessa operação, é de

A) 20%.

B) 15%.

C) 25%.

D) 10%.

21. (Unimontes-MG–2009) Dois irmãos fizeram juntos uma aplicação, a uma taxa de 2% ao mês (juros simples). O mais velho aplicou R$ 1 000,00 a mais que o mais novo. Ao final de um ano, resgataram R$ 7 200,00. A quantia que o irmão mais novo aplicou foi de

A) R$ 3 100,00.

B) R$ 2 500,13.

C) R$ 2 413,23.

D) R$ 2 403,23.

22. (Unimontes-MG–2009) João aplicou R$ 520,00 a juros simples de 3% ao mês. Seu irmão aplicou R$ 450,00 a uma outra taxa. Ao final do 6º mês, ambos atingiram o mesmo montante. A taxa mensal de juros (simples) aplicada ao dinheiro do irmão de João foi de, aproximadamente,

A) 6% ao mês.

B) 5% ao mês.

C) 4% ao mês.

D) 3,5% ao mês.

23. (UNIFESP–2006) André aplicou parte de seus R$ 10 000,00 a 1,6% ao mês, e o restante a 2% ao mês. No final de um mês, recebeu um total de R$ 194,00 de juros das duas aplicações. O valor absoluto da diferença entre os valores aplicados a 1,6% e a 2% é

A) R$ 4 000,00.

B) R$ 5 000,00.

C) R$ 6 000,00.

D) R$ 7 000,00.

E) R$ 8 000,00.

24. (FUVEST-SP–2009) Há um ano, Bruno comprou uma casa por R$ 50 000,00. Para isso, tomou emprestados R$ 10 000,00 de Edson e R$ 10 000,00 de Carlos, prometendo devolver-lhes o dinheiro, após um ano, acrescido de 5% e 4% de juros, respectivamente. A casa valorizou 3% durante esse período de um ano. Sabendo-se que Bruno vendeu a casa hoje e pagou o combinado a Edson e a Carlos, o seu lucro foi de

A) R$ 400,00.

B) R$ 500,00.

C) R$ 600,00.

D) R$ 700,00.

E) R$ 800,00.

25. (UFRJ) A rede de lojas Sistrepa vende por crediário com uma taxa de juros mensal de 10%. Uma certa mercadoria, cujo preço à vista é **P**, será vendida a prazo de acordo com o seguinte plano de pagamento: R$ 100,00 de entrada, uma prestação de R$ 240,00 a ser paga em 30 dias e outra de R$ 220,00 a ser paga em 60 dias. **DETERMINE P**, o valor de venda à vista dessa mercadoria.

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) João deve 12 parcelas de R$ 150,00, referentes ao cheque especial de seu banco, e cinco parcelas de R$ 80,00, referentes ao cartão de crédito. O gerente do banco lhe ofereceu duas parcelas de desconto no cheque especial, caso João quitasse essa dívida imediatamente ou, na mesma condição, isto é, quitação imediata, com 25% de desconto na dívida do cartão. João também poderia renegociar suas dívidas em 18 parcelas mensais de R$ 125,00. Sabendo desses termos, José, amigo de João, ofereceu-lhe emprestar o dinheiro que julgasse necessário pelo tempo de 18 meses, com juros de 25% sobre o total emprestado. A alternativa que dá a João o menor gasto é

A) renegociar suas dívidas com o banco.

B) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação das duas dívidas.

C) recusar o empréstimo de José e pagar todas as parcelas pendentes nos devidos prazos.

D) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cheque especial e pagar as parcelas do cartão de crédito.

E) pegar emprestado de José o dinheiro referente à quitação do cartão de crédito e pagar as parcelas do cheque especial.

02. (Enem–2000) João deseja comprar um carro cujo preço à vista, com todos os descontos possíveis, é de R$ 21 000,00, e esse valor não será reajustado nos próximos meses. Ele tem R$ 20 000,00, que podem ser aplicados a uma taxa de juros compostos de 2% ao mês, e escolhe deixar todo o seu dinheiro aplicado até que o montante atinja o valor do carro. Para ter o carro, João deverá esperar

A) dois meses, e terá a quantia exata.

B) três meses, e terá a quantia exata.

C) três meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 225,00.

D) quatro meses, e terá a quantia exata.

E) quatro meses, e ainda sobrarão, aproximadamente, R$ 430,00.

GABARITO

Fixação

01. D
02. C
03. B
04. C
05. A) R$ 46 137,00
    B) R$ 21 000,00

Propostos

01. E
02. B
03. C
04. A
05. A
06. D
07. B
08. A
09. D
10. C
11. D
12. C
13. B
14. D
15. A
16. D
17. E
18 B
19. C
20. C
21. D
22. A
23. D
24. C
25. P = R$ 500,00

Seção Enem

01. E 02. C

MATEMÁTICA

Regra de três

MÓDULO 05

FRENTE B

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Essa regra é aplicada quando temos apenas duas grandezas envolvidas (direta ou inversamente proporcionais), e queremos relacionar dois valores correspondentes de cada grandeza. São conhecidos três dos quatro valores e o outro valor é, então, determinado através dessa regra. Temos, assim, duas possibilidades:

i) Se a_1 e a_2 são diretamente proporcionais a b_1 e b_2, então:

Grandeza a	Grandeza b
↓ a_1, a_2	↓ b_1, b_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$$

Exemplo

Considerando que em um festival cada 5 pessoas ocupavam uma área de 2 m², quantas pessoas estavam presentes em toda a área de 800 m² de festival?

Resolução:

Quanto maior o número de pessoas no festival, maior o espaço ocupado por todas elas. Logo, o número de pessoas e a área ocupada são grandezas diretamente proporcionais. Assim:

Número de pessoas	Área ocupada
↓ 5, x	↓ 2, 800

$\frac{5}{x} = \frac{2}{800} \Leftrightarrow x = 2\ 000$ pessoas

Logo, estavam presentes no festival 2 000 pessoas.

ii) Se a_1 e a_2 são inversamente proporcionais a b_1 e b_2, então:

Grandeza a	Grandeza b
↓ a_1, a_2	↑ b_1, b_2

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_2}{b_1}$$

Exemplo

Abrindo completamente 6 torneiras, enche-se um tanque com água em 22 minutos. Se abrirmos apenas 4 torneiras, em quanto tempo o tanque ficará cheio?

Resolução:

Quanto menor o número de torneiras abertas, menor será a vazão de água e, consequentemente, mais tempo será gasto para encher o tanque. Logo, o número de torneiras abertas e o tempo são grandezas inversamente proporcionais. Assim:

Número de torneiras	Tempo
↓ 6, 4	↑ 22, x

$\frac{6}{4} = \frac{x}{22} \Leftrightarrow x = 33$ minutos

Portanto, com 4 torneiras, o tanque ficará cheio após 33 minutos.

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Essa regra é aplicada quando são envolvidas mais de duas grandezas. Podemos analisar como se relacionam duas dessas grandezas fixando as demais.

Exemplo

Se 4 operários constroem um muro de 30 m de comprimento em 10 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantas horas por dia deverão trabalhar 6 operários para construir 45 m do mesmo muro em 8 dias?

Resolução:

Sendo **x** o número de horas, por dia, trabalhadas pelos 6 operários, temos:

A Número de operários	B Comprimento do muro	C Número de dias	D Número de horas por dia
↑ 4, 6	↓ 30, 45	↑ 10, 8	↓ 8, x

Vamos determinar o valor faltante da grandeza **D**, que depende dos valores das grandezas **A**, **B** e **C**.

Fixando **A** e **C**, **D** é diretamente proporcional a **B**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, maior será o comprimento do muro construído (na mesma razão, por exemplo, se dobrarmos uma grandeza, a outra também dobrará).

Fixando **B** e **C**, **D** é inversamente proporcional a **A**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, menor será o número de operários necessários à construção (em uma razão inversa, por exemplo, se dobrarmos uma grandeza, a outra cairá pela metade).

Fixando **A** e **B**, **D** é inversamente proporcional a **C**, pois quanto maior o número de horas trabalhadas por dia, menor será o número de dias necessários à construção (em uma razão inversa).

Então, **D** é proporcional a $\frac{B}{AC}$, e podemos montar a seguinte proporção a partir do produto das razões dos valores conhecidos, observando o mesmo sentido das setas mostradas anteriormente:

$$\frac{x}{8} = \frac{10}{8} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{45}{30} \Leftrightarrow x = 10\ \frac{h}{dia}$$

Portanto, cada um dos operários deverá trabalhar 10 horas por dia.

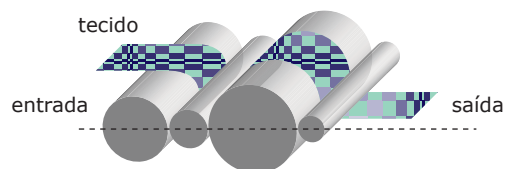
EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

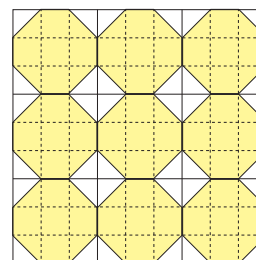
01. (UFPE–2009) Se treze datilógrafos, de mesma capacidade, digitam treze mil e treze símbolos em treze minutos, quantos símbolos são digitados por cada um deles em um minuto?

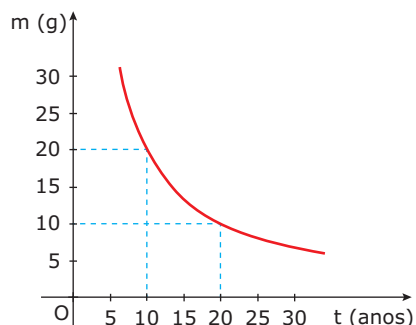
A) 77
B) 71
C) 65
D) 59
E) 55

02. (UFMG) Um mapa está desenhado em uma escala em que 2 cm correspondem a 5 km. Uma região assinalada nesse mapa tem a forma de um quadrado de 3 cm de lado. A área real dessa região é de

A) 37,50 km².
B) 56,25 km².
C) 67,50 km².
D) 22,50 km².

03. (UFMS–2008) Numa fábrica de tecidos, quatro rolos cilíndricos de metal estão dispostos sequencialmente como um conjunto de engrenagens conectadas, veja a figura a seguir. Sabe-se que o diâmetro do primeiro rolo mede 1,6 metros; do segundo, 50 centímetros; do terceiro, 2 metros; e o quarto rolo tem raio medindo 10 centímetros. Estando o sistema já em funcionamento, e sabendo-se que o quarto rolo dá 10 voltas completas por minuto, quantas voltas completas o primeiro rolo dará em 12 horas seguidas de funcionamento?

A) 7 200
B) 900
C) 720
D) 480
E) 450

04. (PUC-SP–2009) Toda energia necessária para o consumo na Terra provém de fonte natural ou sintética. Ultimamente, tem havido muito interesse em aproveitar a energia solar, sob a forma de radiação eletromagnética, para suprir ou substituir outras fontes de potência. Sabe-se que células solares podem converter a energia solar em energia elétrica e que para cada centímetro quadrado de célula solar, que recebe diretamente a luz do Sol, é gerado 0,01 watt de potência elétrica. Considere que a malha quadriculada a seguir representa um painel que tem parte de sua superfície revestida por 9 células solares octogonais, todas feitas de um mesmo material. Se, quando a luz do Sol incide diretamente sobre tais células, elas são capazes de, em conjunto, gerar 50 400 watts de potência elétrica, então a área, em metros quadrados, da superfície do painel não ocupada pelas células solares é

A) 144
B) 189
C) 192
D) 432
E) 648

05. (UFRRJ–2008) A decomposição de uma determinada substância é inversamente proporcional ao tempo. O gráfico da figura foi construído com a massa da substância expressa em gramas, e o tempo, em anos.

O tempo necessário para que essa substância se reduza a 2,5 gramas é de

A) 60 anos.

B) 80 anos.

C) 120 anos.

D) 160 anos.

E) 240 anos.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFMG) No ano passado, uma equipe de 13 professores, com um ritmo de trabalho suposto constante, corrigiu 3 000 provas em 6 dias. Este ano, o número de provas aumentou para 5 500 e a equipe foi ampliada para 15 professores. Para se obter uma estimativa do número **n** de dias necessários para totalizar a correção, suponha que, durante todo o período de correção, o ritmo de trabalho da equipe deste ano será o mesmo da equipe do ano passado. O número **n** satisfaz a condição

A) $n \leq 8$

B) $8 < n \leq 10$

C) $10 < n \leq 12$

D) $n > 12$

02. (UNESP) Os dados publicados na revista *Veja* de 12/4/2000 mostram que, de cada 100 pessoas com o Ensino Médio, apenas 54 conseguem emprego. Se num determinado grupo de 3 000 pessoas, 25% têm Ensino Médio, o número provável de pessoas do grupo, com Ensino Médio, que, de acordo com os dados da pesquisa, irão conseguir emprego é

A) 375

B) 405

C) 450

D) 750

E) 1 620

03. (UFMT–2009) Leia o texto.

Você sabia?

O dióxido de carbono (CO_2) é inodoro, incolor e sufocante. Para cada tonelada dessa substância emitida no ar, é preciso plantar de 3 a 5 árvores.

Um caminhão movido a diesel, que circule 100 quilômetros por dia (de segunda a sexta-feira), cujo consumo seja de 10 km/L, libera 6 toneladas de CO_2 por ano.

Um carro de passeio movido a álcool, nas mesmas condições do caminhão movido a diesel, produz 3 toneladas de CO_2 anualmente.

Cada pessoa gera em média 2,7 tonelada por mês de CO_2, decorrentes do consumo de energia, água, produção de lixo, entre outras atividades.

AQUECIMENTO GLOBAL, ano 1 – nº 5. p. 43.

A partir das informações contidas no texto, analise as afirmativas.

I. Se o carro de passeio deixar de rodar 1 dia (de 2ª à 6ª feira), durante um ano, deixará de emitir 600 kg de CO_2.

II. A quantidade mínima de árvores a ser plantada para compensar a emissão de CO_2 gerada por uma família de 4 pessoas, durante um mês, é superior a 100.

III. A quantidade mínima de árvores a ser plantada para compensar a emissão de CO_2 do caminhão, durante um mês, é igual a 18.

IV. Em um ano, a quantidade, em média, de CO_2 gerada por uma pessoa equivale à quantidade gerada por aproximadamente 11 carros de passeio.

Estão **CORRETAS** as afirmativas

A) I, II e III, apenas.

B) II e III, apenas.

C) II e IV, apenas.

D) I, II, III e IV.

E) I e IV, apenas

04. (UERJ) Dois viajantes partem, simultaneamente, de um mesmo ponto e caminham para uma cidade a 90 km de distância desse ponto. O primeiro viajante percorre, por hora, 1 km a mais do que o segundo viajante e chega à cidade de destino uma hora antes dele. A velocidade, em km/h, do primeiro viajante é igual a

A) 7
B) 8
C) 9
D) 10

05. (PUC-SP–2006) Às 8 horas de certo dia, um tanque, cuja capacidade é de 2 000 litros, estava cheio de água; entretanto, um furo na base desse tanque fez com que a água por ele escoasse a uma vazão constante. Se às 14 horas desse mesmo dia o tanque estava com apenas 1 760 litros, então a água em seu interior se reduziu à metade às

A) 21 horas do mesmo dia.
B) 23 horas do mesmo dia.
C) 4 horas do dia seguinte.
D) 8 horas do dia seguinte.
E) 9 horas do dia seguinte.

06. (UFPE) Uma obra será executada por 13 operários (de mesma capacidade de trabalho), trabalhando durante 11 dias com jornada de trabalho de 6 horas por dia. Decorridos 8 dias do início da obra, 3 operários adoeceram, e a obra deverá ser concluída pelos operários restantes no prazo estabelecido anteriormente. Qual deverá ser a jornada diária de trabalho dos operários restantes nos dias que faltam para a conclusão da obra no prazo previsto?

A) 7 h 42 min
B) 7 h 44 min
C) 7 h 46 min
D) 7 h 48 min
E) 7 h 50 min

07. (Mackenzie-SP–2007) Se 6 pessoas, trabalhando 4 horas por dia, realizam um trabalho em 15 dias, 8 pessoas, trabalhando 6 horas por dia, farão o mesmo trabalho em

A) 42 horas.
B) 45 horas.
C) 48 horas.
D) 50 horas.
E) 52 horas.

08. (PUC Rio–2008) Um festival foi realizado num campo de 240 m por 45 m. Sabendo que por cada 2 m^2 havia, em média, 7 pessoas, quantas pessoas havia no festival?

A) 42 007
B) 41 932
C) 37 800
D) 24 045
E) 10 000

09. (Mackenzie-SP–2006) Na construção de um dique, foram utilizadas 90 toneladas de terra, acondicionadas em sacos plásticos de 5 litros. Considerando que cada cm^3 de terra pesa 3 gramas, a **MENOR** quantidade necessária de sacos para a construção do dique foi de

A) 4 000
B) 6 000
C) 8 000
D) 9 000
E) 10 000

10. (UFPE–2007) Se, em uma fábrica de automóveis, 12 robôs idênticos fazem uma montagem em 21 horas, em quantas horas 9 desses robôs realizam a mesma tarefa?

A) 23 horas
B) 24 horas
C) 25 horas
D) 26 horas
E) 28 horas

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2009) Uma cooperativa de colheita propôs a um fazendeiro um contrato de trabalho nos seguintes termos: a cooperativa forneceria 12 trabalhadores e 4 máquinas, em um regime de trabalho de 6 horas diárias, capazes de colher 20 hectares de milho por dia, ao custo de R$ 10,00 por trabalhador por dia de trabalho e R$ 1 000,00 pelo aluguel diário de cada máquina. O fazendeiro argumentou que fecharia contrato se a cooperativa colhesse 180 hectares de milho em 6 dias, com gasto inferior a R$ 25 000,00. Para atender às exigências do fazendeiro e supondo que o ritmo dos trabalhadores e das máquinas seja constante, a cooperativa deveria

A) manter sua proposta.
B) oferecer 4 máquinas a mais.
C) oferecer 6 trabalhadores a mais.
D) aumentar a jornada de trabalho para 9 horas diárias.
E) reduzir em R$ 400,00 o valor do aluguel diário de uma máquina.

02. (Enem–2004) O jornal de uma pequena cidade publicou a seguinte notícia:

CORREIO DA CIDADE
Abastecimento comprometido

O novo polo agroindustrial em nossa cidade tem atraído um enorme e constante fluxo migratório, resultando em um aumento da população em torno de **2 000 habitantes por ano**, conforme dados do nosso censo:

Ano	População
1995	11 965
1997	15 970
1999	19 985
2001	23 980
2003	27 990

Esse crescimento tem ameaçado nosso fornecimento de água, pois os mananciais que abastecem a cidade têm capacidade para fornecer até **6 milhões de litros de água por dia**. A prefeitura, preocupada com essa situação, vai iniciar uma campanha visando a estabelecer um consumo médio de **150 litros por dia, por habitante**.

A análise da notícia permite concluir que a medida é oportuna. Mantido esse fluxo migratório e bem-sucedida a campanha, os mananciais serão suficientes para abastecer a cidade até o final de

A) 2005
B) 2006
C) 2007
D) 2008
E) 2009

03. (Enem–2009) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de

A) 920 kg.
B) 800 kg.
C) 720 kg.
D) 600 kg.
E) 570 kg.

04. (Enem–2002) Os números e cifras envolvidos, quando lidamos com dados sobre produção e consumo de energia em nosso país, são sempre muito grandes. Apenas no setor residencial, em um único dia, o consumo de energia elétrica é da ordem de 200 mil MWh. Para avaliar esse consumo, imagine uma situação em que o Brasil não dispusesse de hidrelétricas e tivesse de depender somente de termoelétricas, onde cada kg de carvão, ao ser queimado, permite obter uma quantidade de energia da ordem de 10 kWh. Considerando que um caminhão transporta, em média, 10 toneladas de carvão, a quantidade de caminhões de carvão necessária para abastecer as termoelétricas, a cada dia, seria da ordem de

A) 20
B) 200
C) 1 000
D) 2 000
E) 10 000

05. (Enem–2007)

Álcool, crescimento e pobreza

O lavrador de Ribeirão Preto recebe em média R$ 2,50 por tonelada de cana cortada. Nos anos 80, esse trabalhador cortava cinco toneladas de cana por dia. A mecanização da colheita o obrigou a ser mais produtivo. O corta-cana derruba agora oito toneladas por dia.

O trabalhador deve cortar a cana rente ao chão, encurvado. Usa roupas mal-ajambradas, quentes, que lhe cobrem o corpo, para que não seja lanhado pelas folhas da planta. O excesso de trabalho causa a birola: tontura, desmaio, cãibra, convulsão. A fim de aguentar dores e cansaço, esse trabalhador toma drogas e soluções de glicose, quando não farinha mesmo. Tem aumentado o número de mortes por exaustão nos canaviais. O setor da cana produz hoje uns 3,5% do PIB. Exporta US$ 8 bilhões. Gera toda a energia elétrica que consome e ainda vende excedentes. A indústria de São Paulo contrata cientistas e engenheiros para desenvolver máquinas e equipamentos mais eficientes para as usinas de álcool. As pesquisas, privada e pública, na área agrícola (cana, laranja, eucalipto, etc.) desenvolvem a Bioquímica e a Genética no país.

FOLHA DE S. PAULO, 11 mar. 2007 (Adaptação).

Considere-se que cada tonelada de cana-de-açúcar permita a produção de 100 litros de álcool combustível, vendido nos postos de abastecimento a R$ 1,20 o litro. Para que um corta-cana pudesse, com o que ganha nessa atividade, comprar o álcool produzido a partir das oito toneladas de cana resultantes de um dia de trabalho, ele teria de trabalhar durante

A) 3 dias.
B) 18 dias.
C) 30 dias.
D) 48 dias.
E) 60 dias.

06. (Enem–2009) A cisterna é um recipiente utilizado para armazenar água da chuva. Os principais critérios a serem observados para captação e armazenagem de água da chuva são: a demanda diária de água na propriedade; o índice médio de precipitação (chuva), por região, em cada período do ano; o tempo necessário para armazenagem; e a área de telhado necessária ou disponível para captação. Para fazer o cálculo do volume de uma cisterna, deve-se acrescentar um adicional relativo ao coeficiente de evaporação. Na dificuldade em se estabelecer um coeficiente confiável, a Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária (Embrapa) sugere que sejam adicionados 10% ao volume calculado de água. Desse modo, o volume, em m^3, de uma cisterna é calculado por $V_c = V_d \times N_{dia}$, em que V_d = volume de demanda da água diária (m^3), N_{dia} = número de dias de armazenagem, e este resultado deve ser acrescido de 10%. Para melhorar a qualidade da água, recomenda-se que a captação seja feita somente nos telhados das edificações. Considerando que a precipitação de chuva de 1 mm sobre uma área de 1 m^2 produz 1 litro de água, pode-se calcular a área de um telhado a fim de atender a necessidade de armazenagem da seguinte maneira: área do telhado (em m^2) = volume da cisterna (em litros)/precipitação.

Disponível em: <www.cnpsa.embrapa.br>.
Acesso em: 8 jun. 2009 (Adaptação).

Para atender a uma demanda diária de 2 000 litros de água, com período de armazenagem de 15 dias e precipitação média de 110 mm, o telhado, retangular, deverá ter as dimensões mínimas de

A) 6 metros por 5 metros, pois assim teria uma área de 30 m^2.

B) 15 metros por 20 metros, pois assim teria uma área de 300 m^2.

C) 50 metros por 60 metros, pois assim teria uma área de 3 000 m^2.

D) 91 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 2 730 m^2.

E) 110 metros por 30 metros, pois assim teria uma área de 3 300 m^2.

GABARITO

Fixação

01. A
02. B
03. B
04. A
05. B

Propostos

01. B
02. B
03. E
04. D
05. E
06. D
07. B
08. C
09. B
10. E

Seção Enem

01. D
02. E
03. A
04. D
05. D
06. B

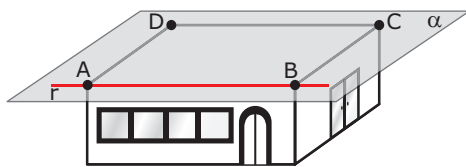
MATEMÁTICA

MÓDULO 06 FRENTE B

Geometria de posição e poliedros

GEOMETRIA DE POSIÇÃO

Introdução

Alguns conceitos na Geometria são intuitivos, primitivos e, por isso, não necessitam de definição. A Geometria de posição é construída com base nas noções intuitivas de ponto, reta e plano, que estão exemplificadas na figura a seguir:

i) **A**, **B**, **C** e **D** são pontos;

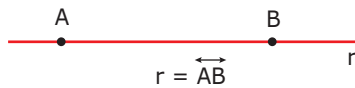
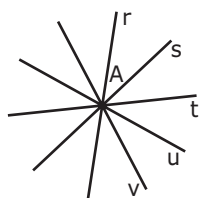
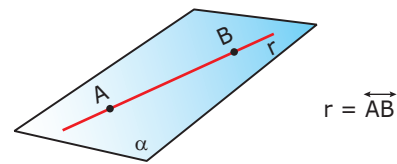
ii) **r** ou $\overleftrightarrow{AB}$ é a reta que contém os pontos **A** e **B**;

iii) **α** é o plano que contém o teto da casa.

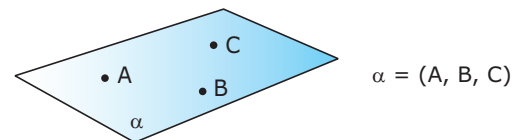
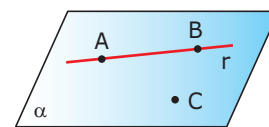
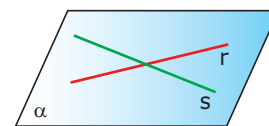
A partir dos conceitos básicos de ponto, reta e plano, podemos enunciar alguns postulados (verdades aceitas sem demonstração):

i) Em uma reta, bem como fora dela, há infinitos pontos.

ii) Em um plano, bem como fora dele, há infinitos pontos.

iii) Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.

iv) Por um ponto passam infinitas retas.

v) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

Determinação de planos

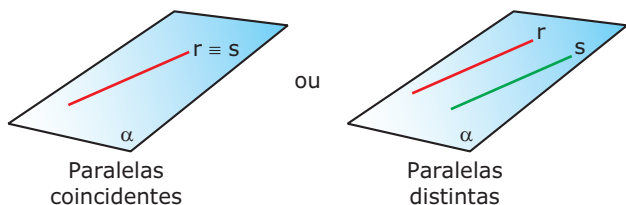
Dizemos que um plano está determinado quando ele é único. Existem quatro modos de se determinar planos:

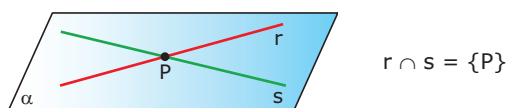
i) Por três pontos não colineares.

ii) Por uma reta e um ponto fora dela.

iii) Por duas retas concorrentes.

iv) Por duas retas paralelas distintas.

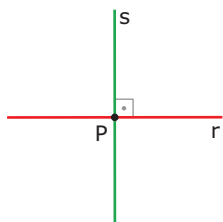
Posições relativas entre duas retas

Duas retas que pertencem ao mesmo plano (coplanares) podem ser: paralelas ou concorrentes.

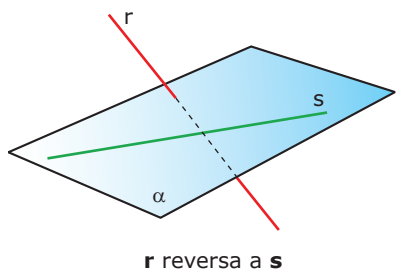
Paralelas

Duas retas coplanares são paralelas se, e somente se, são coincidentes ou não têm ponto comum.

Concorrentes

Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

Caso particular:

Duas retas são perpendiculares se, e somente se, são concorrentes e formam ângulo reto.

Reversas

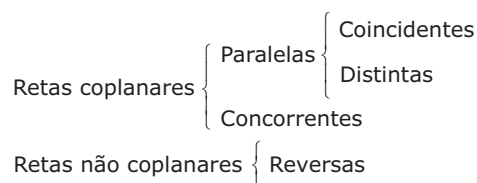
Duas retas são reversas se, e somente se, não existir um plano que as contenha, ou seja, se não forem coplanares.

r reversa a **s**

Não existe um plano que contém **r** e **s** simultaneamente, e, consequentemente, $r \cap s = \varnothing$ (retas reversas não possuem pontos em comum).

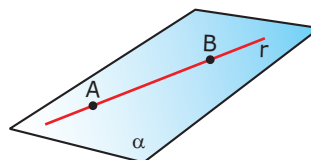
Caso particular:

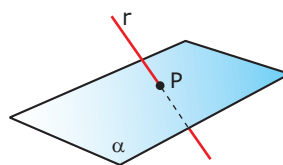
Duas retas são ortogonais se, e somente se, são reversas e formam ângulo reto.

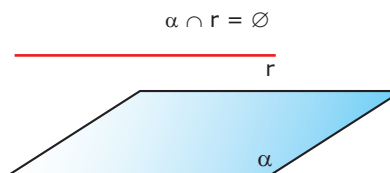
Resumindo:

Dadas duas retas quaisquer, podemos classificá-las da seguinte maneira:

Posições relativas entre uma reta e um plano

Uma reta e um plano podem admitir as seguintes posições relativas:

Reta contida no plano

Uma reta **r** ($\overleftrightarrow{AB}$) está contida em um plano **α** se, e somente se, todos os pontos da reta pertencem ao plano.

Reta secante (ou concorrente) ao plano

Uma reta e um plano são secantes se possuem um único ponto em comum.

Reta paralela ao plano

Uma reta e um plano são paralelos se, e somente se, não possuem pontos em comum.

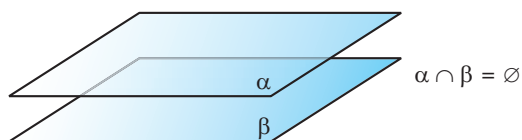
Posições relativas entre planos

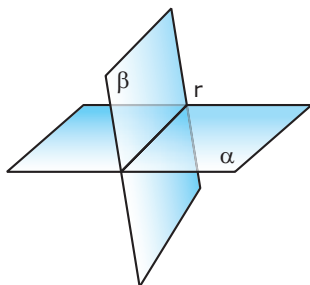
Dois planos podem admitir as seguintes posições relativas:

Paralelos coincidentes

$\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$

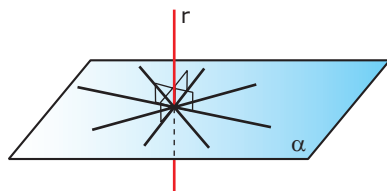
Dois planos são coincidentes se, e somente se, possuem todos os pontos em comum.

Paralelos distintos

Dois planos são paralelos distintos se, e somente se, não possuem ponto em comum.

Secantes

$\alpha \cap \beta = r$

Dois planos são secantes se, e somente se, possuem uma única reta em comum.

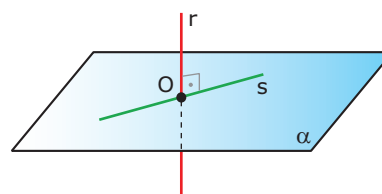
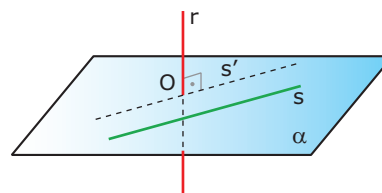
Reta perpendicular ao plano

Uma reta e um plano são perpendiculares se, e somente se, eles têm um ponto comum e a reta é perpendicular a todas as retas do plano que passam por esse ponto comum.

$r \perp \alpha$ ou $\alpha \perp r$

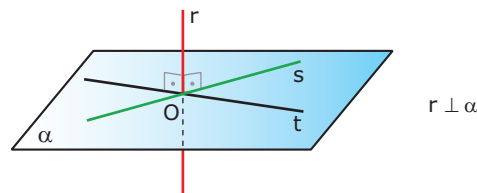
Uma reta e um plano são oblíquos se, e somente se, são concorrentes e não são perpendiculares.

Teorema

Se uma reta é perpendicular a um plano, então ela é perpendicular ou ortogonal a qualquer reta do plano.

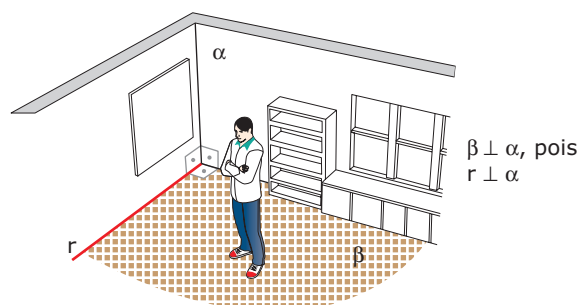
Nas figuras seguintes, mostramos as duas possibilidades.

r e **s** são perpendiculares.

r e **s** são ortogonais (reversas que formam 90º).

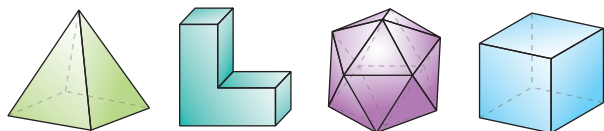
Teorema

Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes de um plano, então ela é perpendicular ao plano.

Observe, na figura, a reta que representa a intersecção de duas paredes da sala. Ela é perpendicular ao chão, pois é perpendicular a duas retas concorrentes do chão.

Planos perpendiculares

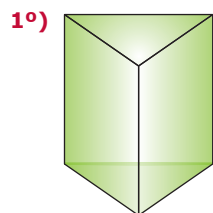
Um plano **α** é perpendicular a um plano **β** se, e somente se, **α** contém uma reta perpendicular a **β**.

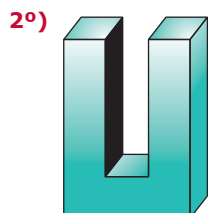
Observe, na figura, que o chão da sala (plano **β**) é perpendicular à parede (plano **α**), pois o chão possui uma reta perpendicular à parede (reta **r**).

POLIEDROS

Poliedros são figuras espaciais fechadas formadas pela reunião de polígonos, como mostrado nos exemplos seguintes:

Cada polígono é denominado face do poliedro. Os lados dos polígonos são as arestas do poliedro e os vértices dos polígonos são os vértices do poliedro.

Um poliedro é chamado convexo se o plano que contém qualquer um dos seus polígonos deixa os demais polígonos no mesmo semiespaço.

Exemplos:

1º)

Poliedro convexo

2º)

Poliedro não convexo

O segundo poliedro é não convexo, pois o plano que contém a face negritada, por exemplo, divide o poliedro em duas partes, uma para cada semiespaço.

Propriedade

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é

$$S = (V - 2).4r$$

em que **V** é o número de vértices, e **r** é um ângulo reto (90º).

Relação de Euler

Para todo poliedro convexo, vale a relação

$$V - A + F = 2$$

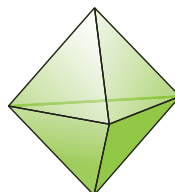
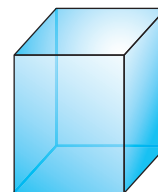
em que **V** é o número de vértices, **A** é o número de arestas, e **F** é o número de faces.

Exemplos:

1º)

$V - A + F = 2$

$5 - 9 + 6 = 2$

2º)

$V - A + F = 2$

$8 - 12 + 6 = 2$

Poliedros de Platão

Um poliedro é chamado poliedro de Platão se, e somente se, satisfaz as três seguintes condições:

i) Todas as faces têm o mesmo número (**n**) de arestas.

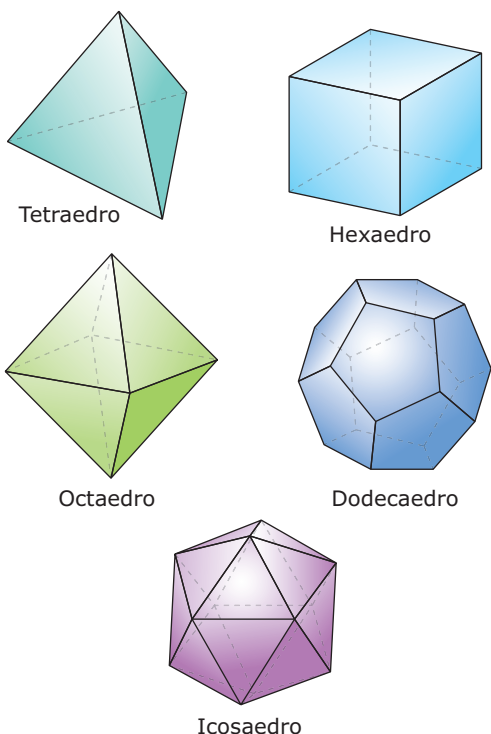
ii) De todos os vértices, parte o mesmo número (**m**) de arestas.

iii) Vale a Relação de Euler (V – A + F = 2).

Propriedade

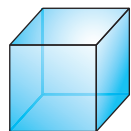
Existem cinco, e somente cinco, classes de poliedros de Platão.

Nomes dos poliedros de Platão

Nome	m	n	A	V	F
Tetraedro	3	3	6	4	4
Hexaedro	3	4	12	8	6
Octaedro	4	3	12	6	8
Dodecaedro	3	5	30	20	12
Icosaedro	5	3	30	12	20

OBSERVAÇÃO

Um poliedro é regular se ele é de Platão e possui todas as arestas congruentes. Todo poliedro regular é poliedro de Platão, mas nem todo poliedro de Platão é poliedro regular.

Exemplos:

1º)

Cubo: poliedro de Platão regular

2º)

Paralelepípedo: poliedro de Platão não regular

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (PUCPR) O tetra-hexaedro é um sólido convexo limitado por 4 faces triangulares e 6 hexagonais, todas regulares. O número de arestas e vértices desse sólido é

A) A = 21 e V = 13

B) A = 24 e V = 16

C) A = 48 e V = 40

D) A = 32 e V = 24

E) A = 34 e V = 24

Resolução:

Em 4 faces triangulares, temos 12 lados, e, em 6 faces hexagonais, temos 36 lados, totalizando 48 lados. Cada lado é comum a duas faces e, portanto, foi contado duas vezes. Assim, o número de arestas **A** é:

$2A = 48 \Rightarrow A = 24$

Aplicando a Relação de Euler a esse poliedro convexo, temos:

$V + F = A + 2 \Rightarrow V + 10 = 24 + 2 \Rightarrow V = 16$

Logo, esse sólido possui 24 arestas e 16 vértices.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (Unimontes-MG–2007) Entre as afirmações a seguir, todas são falsas, **EXCETO**

A) Se duas paredes do mesmo tamanho forem paralelas, toda viga que corta uma delas corta também a outra.

B) Se duas paredes do mesmo tamanho e em posição frontal forem paralelas, toda viga que corta uma delas, perpendicularmente, corta também a outra.

C) Se uma viga é perpendicular ao chão, então todo segmento de reta contido nessa viga é perpendicular ao chão.

D) Se duas vigas que sustentam um teto plano são perpendiculares ao chão, então esse teto é paralelo ao chão.

02. (UEPB–2007) Sejam as afirmativas:

I. Duas retas que não se interceptam são paralelas entre si.

II. Duas retas que não se interceptam são reversas entre si.

III. Se uma reta é perpendicular a uma reta do plano, então ela é perpendicular a esse plano.

IV. Uma reta e um plano são paralelos. Toda reta perpendicular à reta dada é perpendicular ao plano.

Podemos concluir que

A) apenas I é verdadeira.

B) apenas II é verdadeira.

C) todas são falsas.

D) apenas III é verdadeira.

E) apenas IV é verdadeira.

03. (FUVEST-SP) Dados um plano α e uma reta **r**, podemos afirmar que

A) existe um plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

B) existe um único plano β que contém **r** e é perpendicular a α.

C) existe um plano β que contém **r** e é paralelo a α.

D) existe um único plano β que contém **r** e é paralelo a α.

E) qualquer plano β que contém **r** intercepta o plano α.

04. (UFAM) Um poliedro convexo tem três faces triangulares, uma face quadrangular, uma face pentagonal e duas faces hexagonais. Então, o número de vértices desse polígono é igual a

A) 7

B) 15

C) 10

D) 12

E) 9

05. (UFC) Um poliedro convexo só tem faces triangulares e quadrangulares. Se ele tem 20 arestas e 10 vértices, então o número de faces triangulares é

A) 12

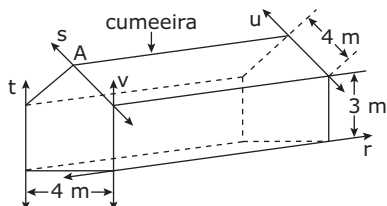
B) 11

C) 10

D) 9

E) 8

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (FAAP-SP) O galpão da figura a seguir está no prumo e a cumeeira está "bem no meio" da parede.

Das retas assinaladas, podemos afirmar que

A) **t** e **u** são reversas.

B) **s** e **u** são reversas.

C) **t** e **u** são concorrentes.

D) **s** e **r** são concorrentes.

E) **t** e **u** são perpendiculares.

02. (UFPE) Considere as seguintes sentenças:

I) Se dois planos distintos têm um ponto comum, então terão também outro ponto comum, distinto do primeiro.

II) Três pontos distintos determinam um único plano.

III) A distância entre dois pontos de uma reta é um número real que depende da unidade da medida escolhida.

Assinale a alternativa **CORRETA**.

A) Apenas II é falsa.

B) I e II são falsas.

C) II e III são falsas.

D) I, II e III são falsas.

E) Apenas I é verdadeira.

03. (VUNESP) Das afirmações a seguir:

I) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são coplanares.

II) Duas retas paralelas a um mesmo plano são paralelas entre si.

III) Se um plano intercepta dois outros planos em retas paralelas, então os dois planos são paralelos.

Temos que

A) apenas uma é falsa.

B) apenas uma é verdadeira.

C) apenas duas são verdadeiras.

D) todas são falsas.

E) todas são verdadeiras.

04. (EFOA-MG) Das alternativas a seguir, assinale a **INCORRETA**.

A) Dois planos, quando se interceptam, o fazem segundo uma reta.

B) Dois planos perpendiculares a uma mesma reta são paralelos.

C) Duas retas perpendiculares a um mesmo plano são paralelas.

D) Duas retas perpendiculares determinam um único plano.

E) Existem planos concorrentes com apenas cinco pontos comuns.

05. (UFJF-MG–2008) O plano π_1 é perpendicular ao plano π_2, o plano π_2 é perpendicular ao plano π_3, e os planos π_1 e π_3 se interceptam segundo uma reta ℓ. É **CORRETO** afirmar que

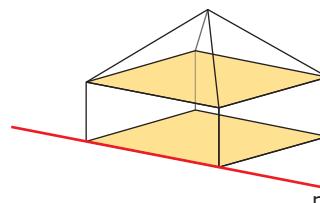
A) os planos π_1 e π_3 são perpendiculares.

B) os planos π_1 e π_3 são paralelos.

C) o plano π_2 também contém a reta ℓ.

D) a reta ℓ é perpendicular a π_2.

E) a reta ℓ é paralela a π_2.

06. (UNIFESP–2009) Considere o sólido geométrico exibido na figura, constituído de um paralelepípedo encimado por uma pirâmide. Seja **r** a reta suporte de uma das arestas do sólido, conforme mostrado.

Quantos pares de retas reversas é **POSSÍVEL** formar com as retas suportes das arestas do sólido, sendo **r** uma das retas do par?

A) 12 B) 10 C) 8 D) 7 E) 6

07. (UFC–2008) O número de faces de um poliedro convexo com 20 vértices e com todas as faces triangulares é igual a

A) 28 B) 30 C) 32 D) 34 E) 36

08. (CESCEA-SP) Num poliedro convexo, o número de vértices é 10 e o número de arestas é 15. Então, o número de faces é

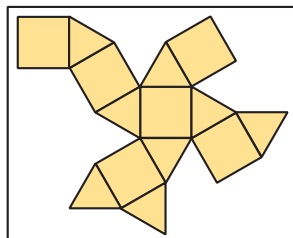
A) 23 B) 5 C) 25 D) 6 E) 7

09. (Cesgranrio) Um poliedro convexo é formado por 80 faces triangulares e 12 pentagonais. O número de vértices do poliedro é

A) 80 B) 60 C) 50 D) 48 E) 36

10. (PUC-SP) Qual é o poliedro regular que tem 12 vértices e 30 arestas?

A) Hexaedro
B) Octaedro
C) Dodecaedro
D) Icosaedro
E) Tridecaedro

11. (UFJF-MG–2007) A figura a seguir representa a planificação de um poliedro convexo. O número de vértices deste poliedro é

A) 12 B) 14 C) 16 D) 20 E) 22

12. (Unimontes-MG–2007) O número de pares de retas reversas que se pode formar, a partir das retas suportes das arestas de um hexaedro, é

A) 16 B) 8 C) 24 D) 32

13. (UEG–2006) Uma bola de futebol foi confeccionada utilizando-se 32 faces planas, sendo 20 hexagonais e 12 pentagonais. Considerando-se que a bola identifica-se com um poliedro assim construído, esse poliedro possui exatamente

A) 180 arestas.
B) 90 vértices.
C) 60 vértices.
D) 60 arestas.

14. (UFTM-MG–2007) Um poliedro convexo, com 32 arestas e 14 vértices, possui apenas faces triangulares e quadrangulares. Sendo **q** o número de faces quadrangulares e **t** o número de faces triangulares, então os valores de **q** e **t** são, respectivamente,

A) q = 6 e t = 14
B) q = 16 e t = 4
C) q = 4 e t = 14
D) q = 14 e t = 4
E) q = 4 e t = 16

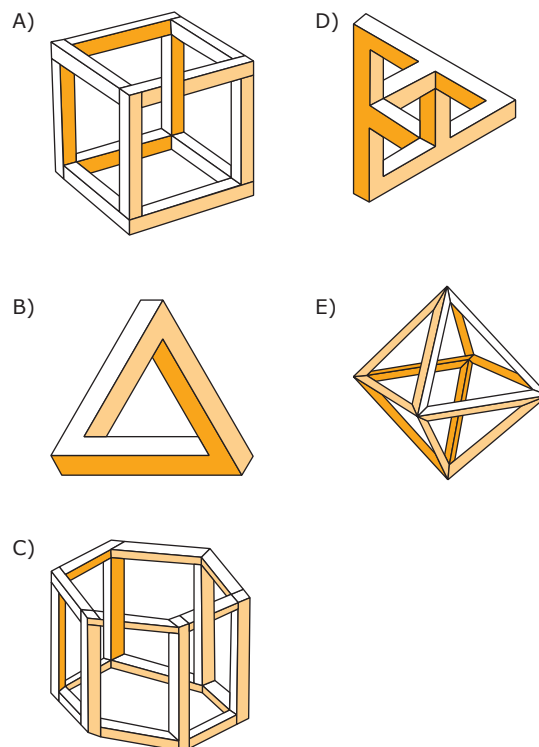
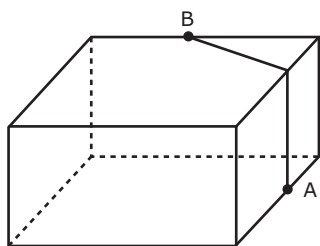
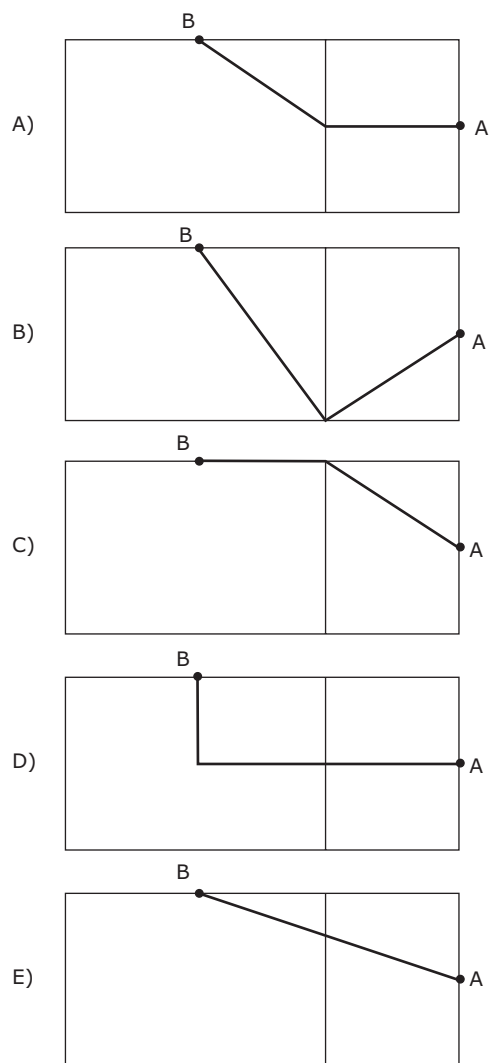
SEÇÃO ENEM

01. (Saeb) Uma caixa no formato de um poliedro precisa ser reforçada com 3 parafusos em cada vértice, um revestimento de metal nas suas 7 faces e uma aplicação de uma cola especial em todas as 15 arestas. A quantidade necessária de parafusos será igual a

A) 72 B) 66 C) 24 D) 30 E) 10

02. (Enem–2007) Representar objetos tridimensionais em uma folha de papel nem sempre é tarefa fácil. O artista holandês Escher (1898-1972) explorou essa dificuldade criando várias figuras planas impossíveis de serem construídas como objetos tridimensionais, a exemplo da litografia Belvedere, reproduzida a seguir:

Considere que um marceneiro tenha encontrado algumas figuras supostamente desenhadas por Escher e deseje construir uma delas com ripas rígidas de madeira que tenham o mesmo tamanho. Qual dos desenhos a seguir ele poderia reproduzir em um modelo tridimensional real?

A)
B)
C)
D)
E)
MATEMÁTICA

03. (Enem–2010) A figura seguinte ilustra um salão de um clube onde estão destacados os pontos **A** e **B**.

Nesse salão, o ponto em que chega o sinal da TV a cabo fica situado em **A**. A fim de instalar um telão para a transmissão dos jogos de futebol da Copa do Mundo, esse sinal deverá ser levado até o ponto **B** por meio de um cabeamento que seguirá na parte interna da parede e do teto. O menor comprimento que esse cabo deverá ter para ligar os pontos **A** e **B** poderá ser obtido por meio da seguinte representação no plano:

GABARITO

Fixação

01. B
02. C
03. A
04. C
05. E

Propostos

01. A
02. A
03. B
04. E
05. D
06. C
07. E
08. E
09. B
10. D
11. A
12. C
13. C
14. E

Seção Enem

01. D
02. E
03. E

MATEMÁTICA

Função quadrática

MÓDULO 05 FRENTE C

INTRODUÇÃO

Sabe-se que em cerca de 2000 a.C., os babilônios já estavam familiarizados com equações do segundo grau, aplicadas à resolução de problemas práticos. Um matemático indiano, de nome Bhaskara, promoveu um enorme avanço na resolução de equações do segundo grau, ao desenvolver uma fórmula para o cálculo das suas raízes.

A função quadrática é uma das funções mais importantes da Matemática. Seu gráfico descreve uma curva extremamente importante, denominada parábola, que serve, por exemplo, para descrever a trajetória de um projétil lançado obliquamente no ar. Hoje, reconhecemos que a função quadrática é muito indicada para a modelagem de problemas nos quais é necessária a determinação de quantidades máximas ou mínimas, indicadas pelas coordenadas do seu vértice.

DEFINIÇÃO DE FUNÇÃO QUADRÁTICA

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que **a**, **b** e **c** são constantes reais e $a \neq 0$, é dita função quadrática ou função polinomial do segundo grau. Seu gráfico é uma curva chamada **parábola**.

RAÍZES DA FUNÇÃO QUADRÁTICA

Fórmula de Bhaskara

Para encontrarmos as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, devemos fazer $f(x) = 0$.

Assim, obtemos a equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Logo, temos $ax^2 + bx = -c$.

Multiplicando os dois membros por 4a, obtemos:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Somando b^2 aos dois membros da equação, a fim de completarmos o quadrado do lado esquerdo, temos:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

O lado esquerdo da equação é um trinômio quadrado perfeito. Logo, podemos escrever:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac \Rightarrow 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Denotando pela letra grega delta (Δ) o termo $b^2 - 4ac$, obtemos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac$$

Esse resultado é conhecido como Fórmula de Bhaskara.

OBSERVAÇÕES

i) Se $\Delta < 0$, a função não possui raízes reais.

ii) Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais.

iii) Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas.

Exemplo

Calcular as raízes da função $f(x) = x^2 + x - 12$.

Resolução:

Igualando a expressão a zero, temos $x^2 + x - 12 = 0$.

Ora, $a = 1$, $b = 1$ e $c = -12$.

Daí, $\Delta = 1^2 - 4.1.(-12) \Rightarrow \Delta = 1 + 48 \Rightarrow \Delta = 49$

Assim: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 7}{2}$

Denotando por x_1 e x_2 as raízes procuradas, temos:

$$x_1 = \frac{-1-7}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \text{ e } x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Portanto, $S = \{-4, 3\}$.

Soma e produto das raízes

Sejam x_1 e x_2 as raízes da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Conhecemos as seguintes relações:

i) Soma das raízes da função

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

ii) Produto das raízes da função

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$$

Exemplo

Calcular, utilizando as relações de soma e produto, as raízes da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolução:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{(-5)}{1} \Rightarrow x_1 + x_2 = 5 \text{ e}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{c}{a} \Rightarrow x_1 . x_2 = \frac{6}{1} \Rightarrow x_1 . x_2 = 6$$

Assim, os números que satisfazem essas condições são 2 e 3.

Portanto, S = {2, 3}.

FORMA FATORADA DA FUNÇÃO $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$

Uma função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, que possua raízes reais x_1 e x_2, pode ser escrita como um produto de duas funções do primeiro grau.

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Exemplo

Escrever a função quadrática $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada.

Resolução:

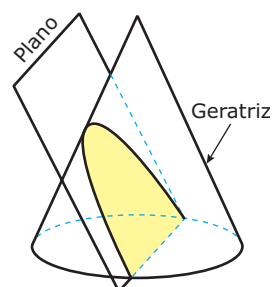
Cálculo das raízes:

$\Delta = (-6)^2 - 4.2.4 \Rightarrow \Delta = 36 - 32 \Rightarrow \Delta = 4$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{4}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{6 \pm 2}{4} \Rightarrow x_1 = 1 \text{ e } x_2 = 2$$

Assim, a função $f(x) = 2x^2 - 6x + 4$, na forma fatorada, é $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$.

GRÁFICOS DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS

Já sabemos que o gráfico de uma função quadrática é uma parábola. Tal curva é definida, geometricamente, como a interseção de um cone de revolução e um plano paralelo à geratriz do cone, conforme figura a seguir:

Para esboçarmos o gráfico de uma função quadrática, devemos seguir a seguinte sequência:

i) Determinar a concavidade da parábola.

Quando **a** (coeficiente de x^2) é positivo, a parábola tem concavidade para cima.

Quando **a** é negativo, a parábola tem concavidade para baixo.

ii) Determinar a interseção da parábola com o eixo Oy.

A parábola intercepta o eixo Oy no ponto (0, c).

iii) Determinar as interseções da parábola com o eixo Ox (raízes).

Conforme visto anteriormente, a existência ou não de raízes reais depende do valor de Δ, na Fórmula de Bhaskara.

Se $\Delta < 0$, a função não tem raízes reais, ou seja, a parábola não intercepta o eixo das abscissas.

Se $\Delta = 0$, a função tem duas raízes reais iguais, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em um único ponto.

Se $\Delta > 0$, a função tem duas raízes reais distintas, ou seja, a parábola intercepta o eixo das abscissas em dois pontos.

iv) Determinar as coordenadas do vértice **V** da parábola.

Vértice é o ponto de interseção da parábola com o eixo de simetria. Como x_v pertence ao eixo de simetria, as abscissas dispostas de maneira simétrica em relação a x_v possuem a mesma imagem.

Logo, x_v é a média aritmética das raízes.

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ ou } x_v = -\frac{b}{2a}$$

Substituindo, na parábola, $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos:

$$y_v = ax_v^2 + b.x_v + c \Rightarrow \boxed{y_v = -\frac{\Delta}{4a}}$$

Portanto, o ponto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é o vértice da parábola.

Determinados esses valores, basta esboçarmos a parábola.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

01. Fazer o esboço da parábola $y = 2x^2 - 3x + 1$.

Resolução:

Concavidade:

Temos $a = 2 > 0$, ou seja, a concavidade está voltada para cima.

Interseção com o eixo Oy:

Temos que $c = 1$, ou seja, a parábola intercepta o eixo das ordenadas no ponto $(0, 1)$.

Raízes:

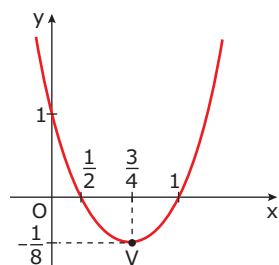
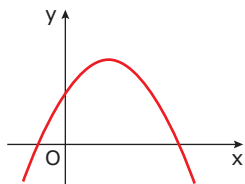
$\Delta = (-3)^2 - 4.2.1 \Rightarrow \Delta = 9 - 8 \Rightarrow \Delta = 1$

$$x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2.2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = 1$$

Logo, as raízes são $\frac{1}{2}$ e 1.

Vértice $V = (x_v, y_v)$:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_v = -\frac{(-3)}{2.2} = \frac{3}{4} \\ y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1}{4.2} = -\frac{1}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow V = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$$

Esboço do gráfico:

02. (FAFI-MG) O gráfico de uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ está representado a seguir. Podemos afirmar que

A) $a < 0$, $b < 0$ e $c < 0$
B) $a < 0$, $b < 0$ e $c > 0$
C) $a < 0$, $b > 0$ e $c < 0$
D) $a < 0$, $b > 0$ e $c > 0$
E) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$

Resolução:

Como a concavidade da parábola está voltada para baixo, temos $a < 0$. Além disso, observe que a interseção do gráfico com o eixo Oy ocorre em um ponto de ordenada positiva. Conforme visto anteriormente, esse ponto é igual a $(0, c)$. Logo, temos que $c > 0$.

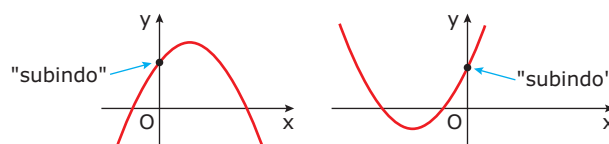
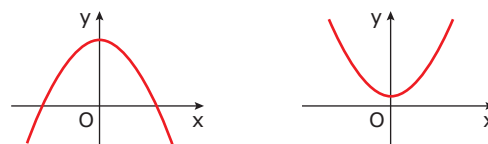
Para investigarmos o sinal do **b**, vamos considerar a abscissa do vértice da parábola. Sabemos que $x_v = -\frac{b}{2a}$.

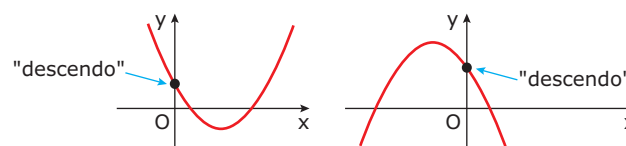
Pelo gráfico, verificamos que x_v é positivo. Como **a** é negativo, temos que $-b$ deve ser negativo. Ora, isso ocorre somente se **b** for positivo.

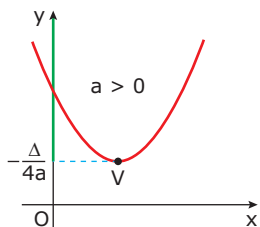
Logo, $b > 0$.

Regra prática para a determinação do sinal de b

No exercício anterior, mostramos uma maneira de determinar o coeficiente **b**. Veremos agora uma regra prática para a obtenção desse sinal.

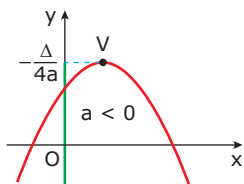
i) Se a parábola está "subindo" quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b > 0$.

ii) Se o vértice encontra-se exatamente no eixo das ordenadas, então $b = 0$.

iii) Se a parábola está "descendo" quando intercepta o eixo das ordenadas, então $b < 0$.

MATEMÁTICA

VALOR MÁXIMO E VALOR MÍNIMO DA FUNÇÃO

Se $a > 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para cima. Nesse caso, é fácil constatar que existe um valor mínimo assumido por **y**, que coincide com a ordenada do vértice y_v. Essa ordenada é o valor mínimo da função.

i) $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor mínimo da função.

ii) A imagem (Im) da função é dada por:

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

Se $a < 0$, a parábola $y = ax^2 + bx + c$ possui concavidade voltada para baixo. Nesse caso, verificamos que existe um valor máximo assumido por **y** e, analogamente, dizemos que a ordenada do vértice y_v é o valor máximo da função.

i) $y_v = -\dfrac{\Delta}{4a}$ é o valor máximo da função.

ii) A imagem (Im) da função é dada por:

$$\text{Im} = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \leq -\frac{\Delta}{4a}\right\}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

03. (UFU-MG) Sendo **x** e **y** números reais tais que $0 \leq x \leq 3$ e $y = x^2 - 2x$, os valores mínimo e máximo de **y** são, nessa ordem, iguais a

A) 0 e 6
B) −1 e 9
C) −1 e 6
D) −1 e 3
E) 3 e 9

Resolução:

Raízes da função:

$x^2 - 2x = 0$

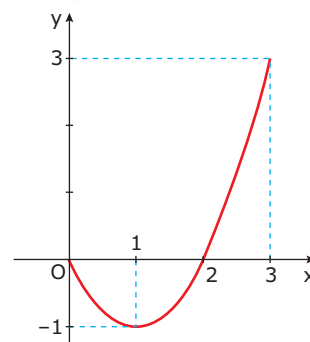
$\Delta = (-2)^2 - 4.1.0 \Rightarrow \Delta = 4$

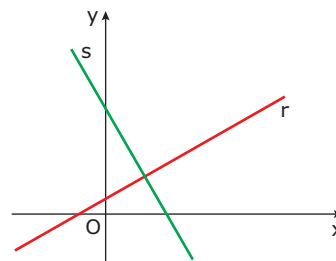
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{4}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{2 \pm 2}{2} \Rightarrow x_1 = 0 \text{ e } x_2 = 2$$

Portanto, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Vértice:

$$\left.\begin{array}{l} x_v = -\dfrac{b}{2.a} \Rightarrow x_v = -\dfrac{(-2)}{2.1} \Rightarrow x_v = 1 \\ y_v = -\dfrac{\Delta}{4.a} \Rightarrow y_v = -\dfrac{4}{4.1} \Rightarrow y_v = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow V = (1, -1)$$

A função está definida no intervalo $0 \leq x \leq 3$. Portanto, para $x = 3$, temos $y = 3$.

Pelo gráfico anterior, verificamos que os valores mínimo e máximo de **y**, nessa ordem, são −1 e 3.

04. (UFV-MG) Na figura a seguir, a reta r: $y = ax + b$ tem coeficiente angular positivo, e a reta s: $y = cx + d$ tem coeficiente angular negativo.

A figura que **MELHOR** representa o gráfico do trinômio $y = (ax + b)(cx + d)$ é

A)

D)

B)

E)

C)

Resolução:

Efetuando a multiplicação dos termos, obtemos $y = (ac)x^2 + (ad + bc)x + bd$. Trata-se de uma função quadrática. Analisando as retas dadas, temos que **a** é positivo, **b** é positivo, **c** é negativo e **d** é positivo. Portanto, **ac** é negativo (concavidade voltada para baixo). Além disso, **bd** é positivo, ou seja, a parábola intercepta o eixo Oy em um ponto de ordenada positiva. Entre os gráficos, o único com essas características é o da letra A.

05. (Fafeid-MG) No instante t = 0, uma bola é atirada verticalmente para cima, de uma altura de 5 cm acima do solo. Após **t** segundos, a sua altura **s**, em cm, acima do solo, é dada por $s = 5 + 40t - 16t^2$. Assim, é **CORRETO** afirmar que a altura máxima da bola, acima do solo, em cm, é igual a

A) 30
B) 25
C) 55
D) 20

Resolução:

O gráfico de s(t) é parabólico, com concavidade voltada para baixo. Assim, a altura máxima corresponde à ordenada do vértice.

$\Delta = 40^2 - 4.(-16).5 \Rightarrow \Delta = 1\,600 + 320 \Rightarrow \Delta = 1\,920$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{4(-16)} \Rightarrow y_v = -\frac{1\,920}{-64} \Rightarrow y_v = 30$$

A altura máxima alcançada é 30 cm.

06. (PUC Minas) Uma empresa fabrica **x** peças por dia, e seu lucro em reais é dado pela função $L(x) = 100(9 - x)(x - 1)$. O lucro máximo obtido pela empresa, por dia, em reais, é

A) 1 200
B) 1 300
C) 1 400
D) 1 500
E) 1 600

Resolução:

Efetuando os produtos indicados, obtemos:

$L(x) = -100x^2 + 1\,000x - 900$

Observe que o lucro L(x) é uma função quadrática do número de peças **x**. Como a concavidade está voltada para baixo, o lucro máximo corresponde à ordenada do vértice.

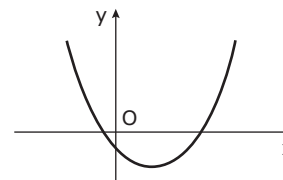
$\Delta = 1\,000^2 - 4(-100)(-900) \Rightarrow$

$\Delta = 1\,000\,000 - 360\,000 \Rightarrow \Delta = 640\,000$

$$y_v = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{4(-100)} \Rightarrow y_v = -\frac{640\,000}{-400} \Rightarrow y_v = 1\,600$$

O lucro máximo é igual a R$ 1 600,00.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) Observe a figura, que representa o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$. Assinale a única afirmativa **FALSA** em relação a esse gráfico.

A) ac é negativo.
B) $b^2 - 4ac$ é positivo.
C) **b** é positivo.
D) **c** é negativo.

02. (UFJF-MG) Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago. O número de passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é

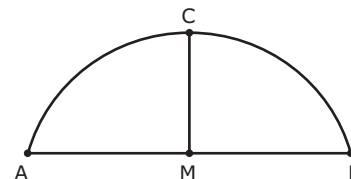
A) 16 B) 24 C) 38 D) 49 E) 54

03. (UFMG) A função f(x) do segundo grau tem raízes −3 e 1. A ordenada do vértice da parábola, gráfico de f(x), é igual a 8. A única afirmativa **VERDADEIRA** sobre f(x) é:

A) $f(x) = -2(x - 1)(x + 3)$
B) $f(x) = -(x - 1)(x + 3)$
C) $f(x) = -2(x + 1)(x - 3)$
D) $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
E) $f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$

04. (UFV-MG–2010) Um retângulo tem três de seus vértices nos pontos (0, 0), (x, 0) e (0, y), sendo **x** e **y** positivos, e o quarto vértice encontra-se sobre a reta $2x + 3y = 6$. Nessas condições, o retângulo de área máxima tem perímetro com medida igual a

A) 4 B) 6 C) 5 D) 7

05. (UNIFESP–2007) A figura mostra um arco parabólico ACB de altura CM = 16 cm, sobre uma base AB de 40 cm. **M** é o ponto médio de AB.

A altura do arco, em centímetros, em um ponto da base que dista 5 cm de **M**, é

A) 15
B) 14
C) 13
D) 12
E) 10

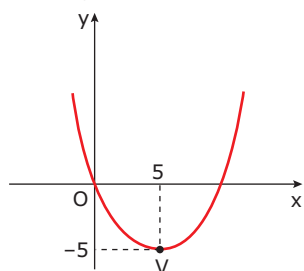
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Minas) Uma pedra é atirada para cima e sua altura **h**, em metros, é dada pela função $h(t) = at^2 + 12t$, em que **t** é medido em segundos. Se a pedra atingiu a altura máxima no instante t = 2, pode-se afirmar que o valor de **a** é

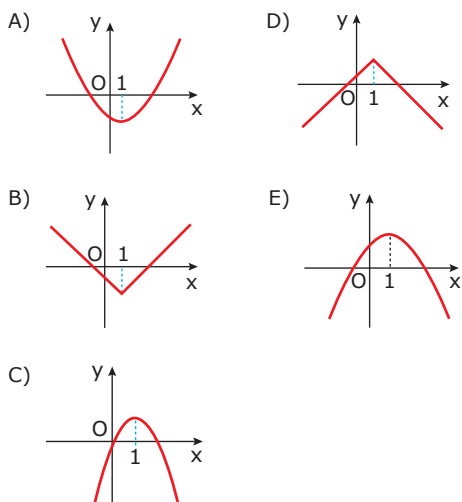
A) –3 B) –2 C) 2 D) 3

02. (PUC Minas) O intervalo no qual a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ é crescente é

A) $x < 5$
B) $1 < x < 5$
C) $x > 1$
D) $x > 3$

03. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, está representada a parábola de vértice **V**, gráfico da função de segundo grau cuja expressão é

A) $y = \frac{x^2}{5} - 2x$
B) $y = x^2 - 10x$
C) $y = x^2 + 10x$
D) $y = \frac{x^2}{5} - 10x$
E) $y = \frac{x^2}{5} + 10x$

04. (UFJF-MG) Considere uma função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada pela expressão $f(x) = -x^2 + bx + c$, em que **b** e **c** são reais, e cujo gráfico tem eixo de simetria na reta x = 1 e módulo da diferença entre as raízes igual a 4. Um esboço que pode representar o gráfico de tal função é

A)
D)
B)
E)
C)
05. (UFMG) A função $f(x) = x^2 + bx + c$, com **b** e **c** reais, tem duas raízes distintas pertencentes ao intervalo [–2, 3]. Então, sobre os valores de **b** e **c**, a única afirmativa **CORRETA** é

A) $c < -6$
B) $c > 9$
C) $-6 < b < 4$
D) $b < -6$
E) $4 < b < 6$

06. (PUC-Campinas-SP) Sejam x_1 e x_2 as raízes reais da equação do 2º grau $ax^2 + bx + c = 0$. Se $\frac{c}{a} > 0$, $-\frac{b}{a} < 0$ e $x_1 < x_2$, deve-se ter

A) $0 < x_1 < 1 < x_2$
B) $x_1 < -1 < 0 < x_2$
C) $0 < x_1 < x_2$
D) $x_1 < 0 < x_2$
E) $x_1 < x_2 < 0$

07. (UFMG) Um certo reservatório, contendo 72 m^3 de água, deve ser drenado para limpeza. Decorridas **t** horas após o início da drenagem, o volume de água que saiu do reservatório, em m^3, é dado por $V(t) = 24t - 2t^2$. Sabendo-se que a drenagem teve início às 10 horas, o reservatório estará completamente vazio às

A) 14 horas.
B) 16 horas.
C) 19 horas.
D) 22 horas.

08. (PUC-SP) Ao levantar dados para a realização de um evento, a comissão organizadora observou que, se cada pessoa pagasse R$ 6,00 por sua inscrição, poderia contar com 460 participantes, arrecadando um total de R$ 2 760,00. Entretanto, também estimou que, a cada aumento de R$ 1,50 no preço de inscrição, receberia 10 participantes a menos. Considerando tais estimativas, para que a arrecadação seja a maior possível, o preço unitário da inscrição em tal evento deve ser

A) R$ 15,00.
B) R$ 24,50.
C) R$ 32,75.
D) R$ 37,50.
E) R$ 42,50.

09. (UFMG) O ponto de coordenadas (3, 4) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A abscissa do vértice dessa parábola é

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2

10. (CEFET-MG–2009) A função $L(x) = -x(x - k)$ representa o lucro de uma empresa em função da quantidade de capital empregado **x**, sendo **k** um valor real fixo. Se o lucro máximo atingido pela empresa foi o valor positivo **y**, então é **CORRETO** afirmar que **k** é igual a

A) $3\sqrt{y}$
B) $2\sqrt{y}$
C) $\frac{\sqrt{y}}{3}$
D) $\sqrt{y - 1}$
E) $\sqrt{y - 2}$

11. (PUC-Campinas-SP) Seja **R** um retângulo que tem 24 cm de perímetro. Unindo-se sucessivamente os pontos médios dos lados de **R**, obtém-se um losango. Qual deve ser a medida do lado desse losango para que sua área seja máxima?

A) 3 cm

B) $3\sqrt{2}$ cm

C) 6 cm

D) $6\sqrt{2}$ cm

E) 9 cm

12. (PUC-Campinas-SP) A soma e o produto das raízes de uma função do 2° grau são, respectivamente, 6 e 5. Se o valor mínimo dessa função é –4, então seu vértice é o ponto

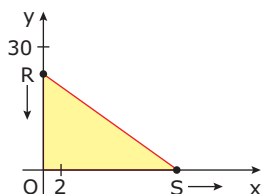
A) (3, –4)

B) $\left(\frac{11}{2}, -4\right)$

C) (0, –4)

D) (–4, 3)

E) (–4, 6)

13. (UFJF-MG–2009) Num sistema de coordenadas cartesianas, o ponto **R** se desloca sobre o eixo das ordenadas, a partir do ponto (0, 30), em direção à origem **O**, com velocidade de 1 cm/s, e o ponto **S** se desloca sobre o eixo das abscissas, partindo do ponto (2, 0), com o dobro dessa velocidade. Eles partem no mesmo instante. Veja a figura a seguir:

Em quanto tempo o triângulo ROS atingirá área máxima?

A) 13 s

B) 14 s

C) 14,5 s

D) 15 s

E) 15,5 s

14. (PUC-SP) Usando uma unidade monetária conveniente, o lucro obtido com a venda de uma unidade de certo produto é (x – 10), sendo **x** o preço de venda e 10 o preço de custo. A quantidade vendida, a cada mês, depende do preço de venda e é, aproximadamente, igual a (70 – x). Nas condições dadas, o lucro mensal obtido com a venda do produto é, aproximadamente, uma função quadrática de **x**, cujo valor **MÁXIMO**, na unidade monetária usada, é

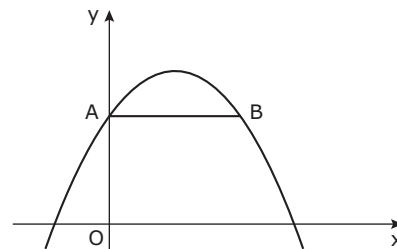
A) 1 200

B) 1 000

C) 900

D) 800

E) 600

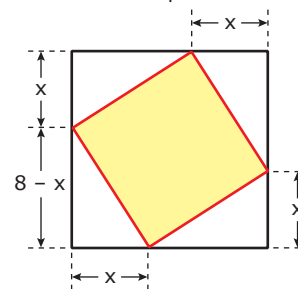
15. (UFMG) Observe esta figura.

Nessa figura, os pontos **A** e **B** estão sobre o gráfico da função de segundo grau $y = ax^2 + bx + c$. O ponto **A** situa-se no eixo das ordenadas, e o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas. Assim, é **CORRETO** afirmar que o comprimento do segmento AB é

A) c

B) $-\frac{c}{a}$

C) $\frac{b}{a}$

D) $-\frac{b}{a}$

16. (PUC-Campinas-SP) Na figura a seguir tem-se um quadrado inscrito em outro quadrado.

Pode-se calcular a área do quadrado interno, subtraindo-se da área do quadrado externo as áreas dos 4 triângulos. Feito isso, verifica-se que **A** é uma função da medida **x**. O valor mínimo de **A** é

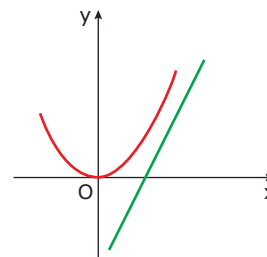
A) 16 cm².

B) 24 cm².

C) 28 cm².

D) 32 cm².

E) 48 cm².

17. (UFMG) Observe esta figura.

Nela, estão representados os gráficos das funções $f(x) = \frac{x^2}{2}$ e $g(x) = 3x - 5$. Considere os segmentos paralelos ao eixo **y**, com uma das extremidades sobre o gráfico da função **f** e a outra extremidade sobre o gráfico da função **g**. Entre esses segmentos, seja **S** o que tem o menor comprimento. Assim, o comprimento do segmento **S** é

A) $\frac{1}{2}$

B) $\frac{3}{4}$

C) 1

D) $\frac{5}{4}$

18. (PUC Minas) O lucro de uma microempresa, em função do número de funcionários que nela trabalham, é dado, em milhares de reais, pela fórmula $L(n) = 36n - 3n^2$. Com base nessas informações, pode-se afirmar que o lucro dessa microempresa é máximo quando nela trabalham

A) 6 funcionários.
B) 8 funcionários.
C) 10 funcionários.
D) 12 funcionários.

19. (Unifor-CE) Sobre a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, definida por $y = -x^2 + 2x - 4$, é verdade que

A) admite as raízes $1 + \sqrt{5}$ e $1 - \sqrt{5}$.
B) é crescente em]3, 10[.
C) é decrescente em]0, 2[.
D) seu conjunto imagem é $]-\infty, -3]$.
E) assume um valor mínimo para x = 1.

20. (FGV-SP) A função $f: [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. A diferença entre o valor máximo e o valor mínimo dessa função é

A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

SEÇÃO ENEM

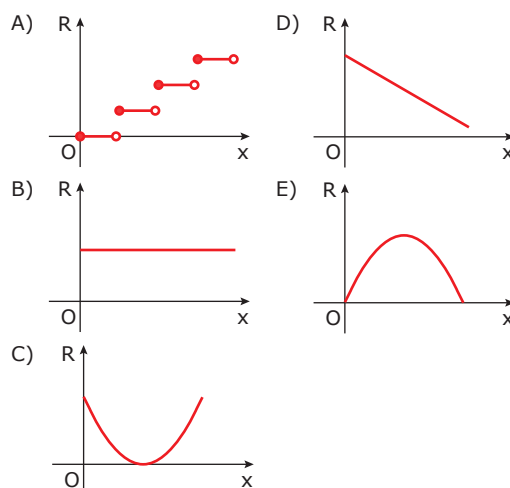
01. (Enem–2009) Um posto de combustível vende 10 000 litros de álcool por dia a R$ 1,50 cada litro. Seu proprietário percebeu que, para cada centavo de desconto que concedia por litro, eram vendidos 100 litros a mais por dia. Por exemplo, no dia em que o preço do álcool foi R$ 1,48, foram vendidos 10 200 litros. Considerando **x** o valor, em centavos, do desconto dado no preço de cada litro, e **V** o valor, em R$, arrecadado por dia com a venda do álcool, então, a expressão que relaciona **V** e **x** é

A) $V = 10\,000 + 50x - x^2$
B) $V = 10\,000 + 50x + x^2$
C) $V = 15\,000 - 50x - x^2$
D) $V = 15\,000 + 50x - x^2$
E) $V = 15\,000 - 50x + x^2$

Instrução: Texto para as questões **02** e **03**.

Um boato tem um público-alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhecem o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhecem. Em outras palavras, sendo **R** a rapidez de propagação, **P** o público-alvo e **x** o número de pessoas que conhecem o boato, tem-se:

R(x) = k.x.(P – x), em que **k** é uma constante positiva característica do boato.

02. (Enem–2000) O gráfico cartesiano que melhor representa a função R(x), para **x** real, é

03. (Enem–2000) Considerando o modelo anteriormente descrito, se o público-alvo é de 44 000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a

A) 11 000
B) 22 000
C) 33 000
D) 38 000
E) 44 000

04. (Enem–2009 / Adaptado) A empresa WQTU Cosmético vende um determinado produto, cujo custo de fabricação de **x** unidades é dado por $3x^2 + 232$, e o seu valor de venda é expresso pela função $180x - 116$. A empresa vendeu 10 unidades desse produto; contudo, a mesma deseja saber quantas unidades precisa vender para obter um lucro máximo. A quantidade máxima de unidades a serem vendidas pela empresa WQTU para a obtenção do maior lucro é

A) 10 B) 30 C) 58 D) 116 E) 232

GABARITO

Fixação

01. C 02. C 03. A 04. C 05. A

Propostos

01. A	05. C	09. C	13. C	17. A
02. D	06. E	10. B	14. C	18. A
03. A	07. B	11. B	15. D	19. D
04. E	08. D	12. A	16. D	20. E

Seção Enem

01. D 02. E 03. B 04. B

MATEMÁTICA

MÓDULO 06 FRENTE C

Função composta e função inversa

FUNÇÃO BIJETORA

Uma função f: A → B é bijetora se, e somente se, essa função atende às seguintes condições.

i) A sua imagem (Im) é igual ao seu contradomínio (CD).

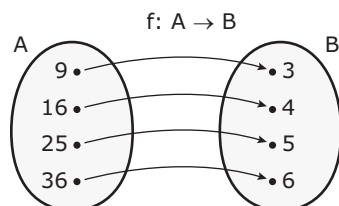
Observe que, ao representarmos simbolicamente uma função **f** na forma f: A → B, o conjunto **A** é o domínio da função, e o conjunto **B** é o contradomínio da função.

Portanto, a condição é satisfeita se, e somente se, Im = B.

ii) Para quaisquer elementos x_1 e x_2 do domínio **A**, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, cada elemento da imagem deve estar relacionado com um único elemento do domínio.

Exemplos

1º) Exemplo em forma de diagrama

Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = A = {9, 16, 25, 36}

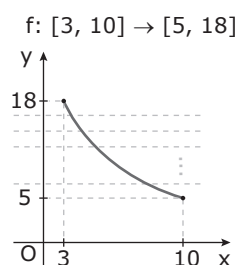
Contradomínio: CD = B = {3, 4, 5, 6}

Imagem: Im = {3, 4, 5, 6}

Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio.

2º) Exemplo em forma de gráfico

Verificando a condição **i**, temos que:

Domínio: D = [3, 10]

Contradomínio: CD = [5, 18]

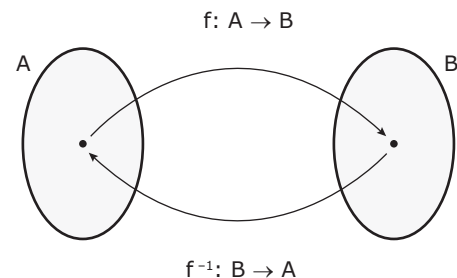
Imagem (projeção do gráfico no eixo das ordenadas): Im = [5, 18]

Logo, CD = Im.

Verificando a condição **ii**:

Podemos observar que cada elemento da imagem está relacionado com um único elemento do domínio. Para tal verificação, basta traçarmos linhas paralelas ao eixo das abscissas, a partir da imagem. Cada uma dessas linhas deve interceptar a curva em um único ponto, para que a condição seja satisfeita.

FUNÇÃO INVERSA

Considere o diagrama a seguir:

No diagrama, está indicada uma função **f** que associa a cada elemento de **A** a sua imagem em **B**. A função inversa de **f**, indicada por f^{-1}, é a função que associa a cada elemento de **B** a sua imagem em **A**.

Observe que **f** deve ser uma função bijetora.

> Uma função bijetora f: A → B é inversível, e sua inversa é a função f^{-1}: B → A se, e somente se, para todo $(x, y) \in f \rightarrow (y, x) \in f^{-1}$.

Cálculo da função inversa – regra prática

i) Trocar **x** por **y** e **y** por **x**.

ii) Isolar o novo **y**.

Exemplos

Determinar a função inversa das seguintes funções.

1º) $f(x) = 3x$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**): $x = 3y$

(isolar o novo **y**): $y = \frac{x}{3}$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

2º) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, para $x \neq -2$

(trocar **x** por **y** e **y** por **x**):

$x = \frac{y-1}{y+2} \Rightarrow y - 1 = xy + 2x \Rightarrow y - xy = 2x + 1$

(isolar o novo **y**):

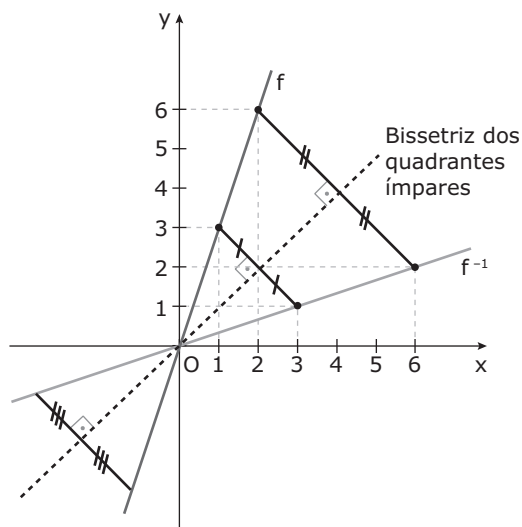
$y(1 - x) = 2x + 1 \Rightarrow y = \frac{2x+1}{1-x}$, para $x \neq 1$

Assim, indicamos na forma $f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{1-x}$.

OBSERVAÇÃO

Os gráficos da função **f** de sua inversa f^{-1} são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Exemplo

Esboçando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$ em um mesmo sistema de eixos e considerando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos:

EXERCÍCIO RESOLVIDO

01. (UFV-MG) Seja **f** a função real tal que $f(2x - 9) = x$, para todo **x** real. A igualdade $f(c) = f^{-1}(c)$ se verifica para **c** igual a

A) 5
B) 7
C) 3
D) 9
E) 1

Resolução:

Cálculo de f(c):

Fazendo $2x - 9 = k$, temos $x = \frac{k+9}{2}$. Portanto, temos que $f(k) = \frac{k+9}{2}$. Logo, podemos dizer que $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Então, para $x = c$, temos $f(c) = \frac{c+9}{2}$.

Cálculo de $f^{-1}(c)$:

Temos $f(x) = \frac{x+9}{2}$.

Trocando **x** por **y** e **y** por **x**, temos:

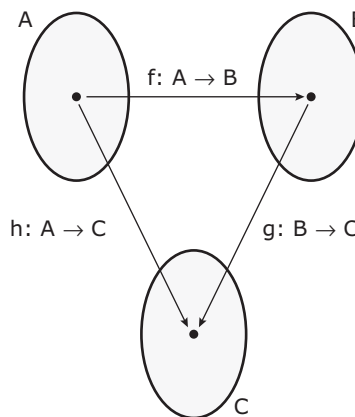
$x = \frac{y+9}{2} \Rightarrow y = 2x - 9 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2x - 9$

Logo, para $x = c$, temos $f^{-1}(c) = 2c - 9$.

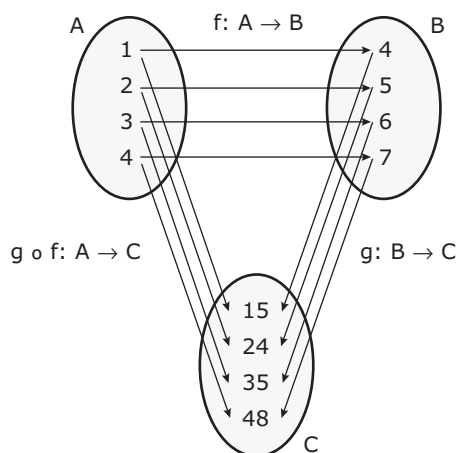
Fazendo $f(c) = f^{-1}(c)$, obtemos:

$\frac{c+9}{2} = 2c - 9 \Rightarrow 4c - 18 = c + 9 \Rightarrow 3c = 27 \Rightarrow c = 9$

FUNÇÃO COMPOSTA

Sejam as funções **f** e **g**, tais que $f: A \to B$ e $g: B \to C$, conforme a figura a seguir:

Considere uma função $h: A \to C$ que produz os mesmos resultados que as funções **f** e **g** aplicadas em sequência, ou seja, que relaciona cada elemento de **A** com o correspondente elemento de **C** sem passar pelo conjunto **B**. Tal função **h** é denominada função composta de **f** e **g**.

Denotamos a função composta h(x) por g(f(x)) ou g o f(x).

Como exemplo, considere os conjuntos **A**, **B** e **C** representados a seguir e sejam as funções f: A → B e g: B → C, tais que f(x) = x + 3 e g(x) = x^2 – 1. Vamos descobrir a expressão matemática da função g(f(x)), que relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

Para calcularmos a expressão da função g(f(x)), devemos substituir o **x** na expressão de g(x) por f(x).

Assim, como g(x) = x^2 – 1, temos:

g(f(x)) = $f(x)^2$ – 1

Mas, f(x) = x + 3. Portanto, temos:

g(f(x)) = g(x + 3) = $(x + 3)^2$ – 1 = x^2 + 6x + 9 – 1

Assim, g(f(x)) = x^2 + 6x + 8.

Observe que essa expressão realmente relaciona os elementos de **A** com os elementos de **C**.

- Para x = 1, temos g(f(1)) = 1^2 + 6.1 + 8 = 15.
- Para x = 2, temos g(f(2)) = 2^2 + 6.2 + 8 = 24.
- Para x = 3, temos g(f(3)) = 3^2 + 6.3 + 8 = 35.
- Para x = 4, temos g(f(4)) = 4^2 + 6.4 + 8 = 48.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

02. Sejam as funções f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que f(x) = 2x + 3 e g(x) = x – 2. Calcular:

A) f(g(2))

Resolução:

f(g(2)) = f(0) = 3

B) f o g o g(1)

Resolução:

f o g o g(1) = f(g(g(1))) = f(g(–1)) = f(–3) = –3

C) f(g(x))

Resolução:

f(g(x)) = 2g(x) + 3 = 2(x – 2) + 3 = 2x – 1

D) g o f(x)

Resolução:

g o f(x) = g(f(x)) = f(x) – 2 = 2x + 3 – 2 = 2x + 1

03. Considere as funções f(x) = 4x + 11 e f(g(x)) = 6x – 10. Determinar a expressão de g(x).

Resolução:

Pela definição de função composta, temos que f(g(x)) = 4g(x) + 11. Igualando esse resultado com a expressão fornecida, temos:

$4g(x) + 11 = 6x - 10 \Rightarrow 4g(x) = 6x - 21 \Rightarrow g(x) = \frac{6x - 21}{4}$

04. Sejam as funções h(x) = 5x – 3 e t(h(x)) = 15x + 32. Determinar a expressão de t(x).

Resolução:

t(h(x)) = 15x + 32 ⇒ t(5x – 3) = 15x + 32 (I)

Vamos denotar 5x – 3 por **k**. Assim, temos:

$5x - 3 = k \Rightarrow x = \frac{k+3}{5}$

Substituindo na expressão (I), temos:

$t(k) = 15.\left(\frac{k+3}{5}\right) + 32 \Rightarrow t(k) = 3k + 9 + 32 \Rightarrow$

t(k) = 3k + 41

Daí, se a expressão vale para **k**, a mesma também vale para **x**, ou seja, t(x) = 3x + 41.

05. (UFU-MG) Seja **f** uma função real de variável real definida por $f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ se } x \geq 0 \\ f(f(-x)), \text{ se } x < 0 \end{cases}$.

Então, f(–1) é igual a

A) 0

B) 1

C) 2

D) –1

E) 3

Resolução:

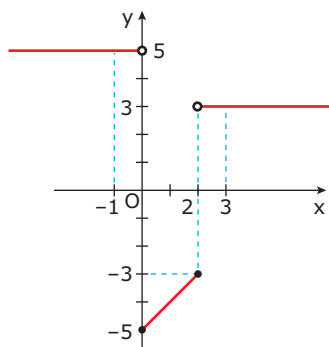
Para x = –1, temos f(–1) = f(f(1)).

Mas f(1) = 1 + 1 ⇒ f(1) = 2.

Logo, f(–1) = f(2).

Mas f(2) = 2 + 1 ⇒ f(2) = 3.

Logo, f(–1) = 3.

06. (Mackenzie-SP) O gráfico a seguir representa uma função definida em $\mathbb{R}$ por $y = f(x)$.

O valor de $f(2) + f(f(-5))$ é igual a

A) -2

B) -1

C) 0

D) 1

E) 2

Resolução:

Pelo gráfico, verificamos que $f(2) = -3$.

Além disso, $f(-5) = 5$.

Logo, $f(f(-5)) = f(5) = 3$.

Portanto, $f(2) + f(f(-5)) = -3 + 3 = 0$.

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (EFOA-MG) A figura a seguir representa o gráfico de uma função **f**.

O total de elementos **x** tais que $f(f(x)) = 2$ é

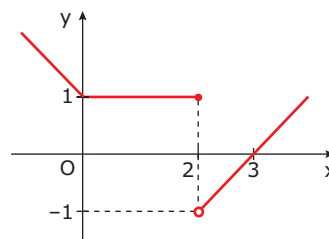
A) 2

B) 4

C) 0

D) 3

E) 1

02. (Unifor-CE) Seja a função **f**, de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, representada no gráfico a seguir.

É **CORRETO** afirmar que

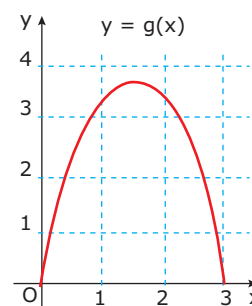
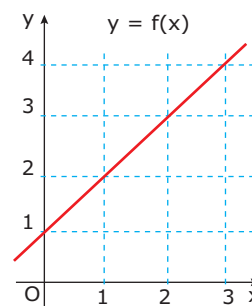
A) o conjunto imagem de **f** é o intervalo $]-1, +\infty[$.

B) **f** é negativa, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $x < 3$.

C) **f** é cresente, para todo $x \in \mathbb{R}$.

D) **f** é bijetora.

E) **f** é par.

03. (UFJF-MG–2007) A seguir, encontram-se representados os gráficos das funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sabendo que **f** possui inversa $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o valor de $f \circ g \circ f^{-1}(2)$ é

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

04. (UFU-MG) Considere a função $f(x) = 2x^2 + 1$, para $x \geq 0$. Sendo **g** a função inversa de **f**, então, pode-se afirmar que o número real $g(f(6)) + f(g(6))$ pertence ao intervalo

A) [0, 4]

B) [4, 13]

C) [20, 36]

D) [36, 73]

05. (UFJF-MG) Sendo A = {1, 2, 3, 4, 5} e sabendo-se que o gráfico da função injetora f: A → A passa pelos pontos (1, 3), (2, 5) e (3, 4), podemos concluir que

A) o gráfico de **f** passa pelo ponto (3, 1).

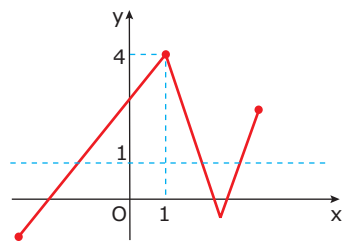
B) a função **f** admite inversa.

C) a função **f** é crescente.

D) a função **f** é decrescente.

E) o gráfico de **f** passa pelo ponto (5, 4).

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Minas) Na figura, está o gráfico da função **f**.

O total de elementos **x** tais que $f(f(x)) = 4$ é

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

02. (UEL-PR) Se **f** e **g** são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tais que $f(x) = 2x - 1$ e $f(g(x)) = x^2 - 1$, então $g(x)$ é igual a

A) $2x^2 + 1$

B) $\frac{x}{2} - 1$

C) $\frac{x^2}{2}$

D) $x + 1$

E) $x + \frac{1}{2}$

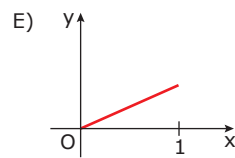
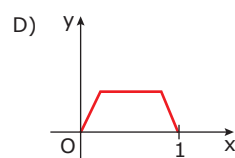
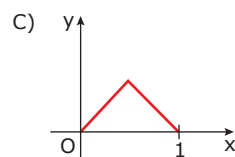
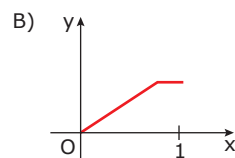
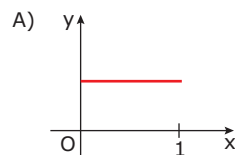
03. (UNIFESP) Há funções y = f(x) que possuem a seguinte propriedade: "a valores distintos de **x** correspondem valores distintos de **y**". Tais funções são chamadas injetoras. Qual, entre as funções cujos gráficos aparecem a seguir, é injetora?

A)

B)

C)

D)

E)

04. (UFC–2009) O coeficiente **b** da função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + bx + 1$, que satisfaz a condição $f(f(-1)) = 3$, é igual a

A) –3

B) –1

C) 0

D) 1

E) 3

05. (ITA-SP) Qual das funções definidas a seguir é bijetora?

A) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, tal que $f(x) = x^2$

B) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, tal que $f(x) = x^2 + 1$

C) $f: [1, 3] \to [2, 4]$, tal que $f(x) = x + 1$

D) $f: [0, 2] \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \text{sen } x$

E) $f: [0, 2] \to [0, 3]$, tal que $f(x) = x + 1$

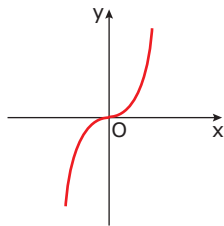
06. (UFU-MG–2006) Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que (f o g)(x) = 10x – 1 e g(x) = –5x + 2. Sabendo-se que o gráfico de **f** é uma reta, assinale a única alternativa **INCORRETA**.

A) $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

B) **f** é decrescente.

C) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 4$

D) O coeficiente angular do gráfico de **f** é –2.

07. (UFES) A função cujo gráfico está representado na figura a seguir tem inversa.

O gráfico de sua inversa é

A)
B)
C)
D)
E)
08. (UFMG) Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ funções tais que f(x) = x + 1 e $g(x) = \frac{x^2 + x}{x}$. Então, pode-se afirmar que

A) f = g

B) g o f está definida em $\mathbb{R}$.

C) (f o g)(x) = x + 2, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$

D) f(x) > 0 e g(x) > 0, $\forall$ x > –1

E) f(x) < 0 e g(x) < 0, $\forall$ x < –1

09. (UFRJ) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por f(x) = ax + b. Se o gráfico da função **f** passa pelos pontos A(1, 2) e B(2, 3), a função f^{-1} (inversa de **f**) é

A) $f^{-1}(x) = x + 1$

B) $f^{-1}(x) = -x + 1$

C) $f^{-1}(x) = x - 1$

D) $f^{-1}(x) = x + 2$

E) $f^{-1}(x) = -x + 2$

10. (FEI-SP) Se $f(2x + 3) = 4x^2 + 6x + 1$, $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, então f(1 – x) vale

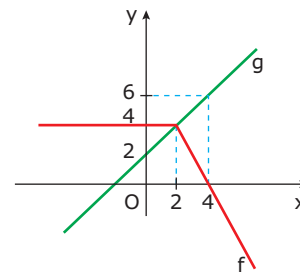
A) $2 - x^2$

B) $2 + x^2$

C) $x^2 + 2x - 4$

D) $3x^2 - 2x + 4$

E) $x^2 + x - 1$

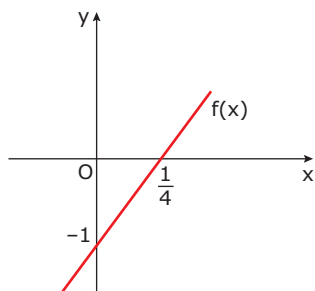
11. (UFU-MG–2009) Sejam f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções cujos gráficos estão esboçados a seguir:

Definindo h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por h(x) = f(x) – g(x), é **CORRETO** afirmar que

A) (f o h)(4) = $g^{-1}(4)$.

B) a função **h** nunca se anula.

C) (f o h)(0) = (g o h)(0).

D) **h** é crescente no intervalo]–∞, 2].

12. (Cesgranrio) Com a função f(x), representada no gráfico a seguir, e com a função g(x), obtém-se a composta g(f(x)) = x. A expressão algébrica que define g(x) é

A) $-\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$

B) $-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

C) $\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

D) $\frac{x}{4}-\frac{1}{4}$

E) $\frac{x}{4}+1$

13. (UFJF-MG–2007) Seja f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por f(x) = ax – 8 e tal que f(f(1)) > 1. O **MENOR** valor inteiro positivo possível para **a** é

A) um número ímpar.

B) um número primo.

C) um múltiplo de 3.

D) um múltiplo de 5.

E) um múltiplo de 7.

14. (UFTM-MG–2008) As retas **r** e **s** são simétricas com relação à reta y = x. Se a equação de **r** é y = ax + b, com a ≠ 0 e b ≠ 0, então a equação de **s** é

A) $y = \frac{x}{a} + b$

B) $y = -\frac{x}{a} + b$

C) $y = -\frac{x}{a} - b$

D) $y = \frac{x}{a} + \frac{b}{a}$

E) $y = \frac{x}{a} - \frac{b}{a}$

15. (UFU-MG–2008) Sejam **f** e **g** duas funções reais definidas para todo número real. Se **f** é dada por $f(x) = 2^{x+1} - 3$ e a função composta f o g, por (f o g)(x) = $x^2 + 1$, então o valor de g(–2).g(2) é igual a

A) 4

B) 8

C) 16

D) 32

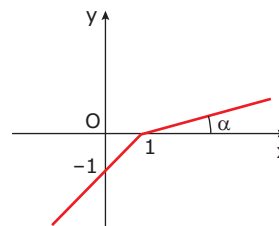
16. (UFU-MG–2006) Seja **f** a função real de variável real cujo gráfico está representado na figura a seguir. Sejam **g** a função inversa de **f** e **h** a função definida por h(x) = –g(–x). Assinale a alternativa que corresponde ao gráfico da função **h**.

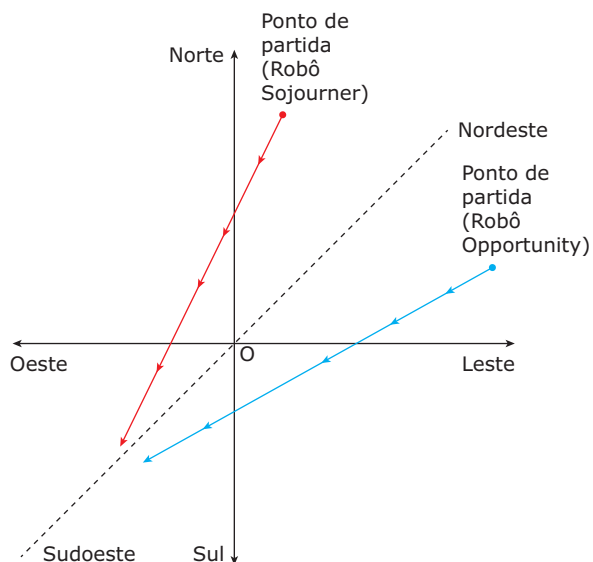
A)

B)

C)

D)

MATEMÁTICA

SEÇÃO ENEM

01. A figura a seguir indica as trajetórias de dois robôs, Sojourner e Opportunity, utilizados pela Agência Espacial Americana no projeto de exploração científica do planeta Marte. Considere que os dois robôs tenham partido, simultaneamente, de pontos distintos da superfície de Marte, com a mesma velocidade e em trajetória retilínea, em uma missão de exploração. Cada um dos robôs é controlado por um operador na Terra.

Sabe-se que o robô Sojourner intercepta a linha norte-sul a 4 km ao norte do ponto de referência **O**, e intercepta a linha leste-oeste a 2 km a oeste desse mesmo ponto de referência. Considerando-se que a trajetória do robô Opportunity seja simétrica à trajetória do robô Sojourner em relação à linha sudoeste-nordeste, e que não ocorram imprevistos que atrasem os robôs, pode-se afirmar que os mesmos irão se encontrar a, aproximadamente,

(Considere: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$)

A) 1,4 km do ponto **O**.

B) 2,8 km do ponto **O**.

C) 4,2 km do ponto **O**.

D) 5,6 km do ponto **O**.

E) 7,0 km do ponto **O**.

02. Uma das etapas da implementação de uma rotina de programação de computadores consiste na determinação de um parâmetro φ. Esse parâmetro é obtido da seguinte forma:

- Um dado de entrada **x** é inserido no programa.
- Multiplica-se **x** por 8.
- Adiciona-se 11 ao resultado anterior.

Em uma etapa subsequente, o programador calcula um parâmetro σ, utilizando o valor de φ calculado anteriormente, do seguinte modo:

- Adiciona-se 13 ao valor de φ.
- Eleva-se o valor obtido ao quadrado.

Um programador decidiu determinar o parâmetro σ em uma única etapa, a partir do dado de entrada **x**. A expressão matemática correspondente a essa operação é

A) $\sigma = 64(x^2 + 6x + 9)$

B) $\sigma = 64(x^2 + 11x + 13)$

C) $\sigma = 64(x^2 + 9)$

D) $\sigma = 64(x^2 - 3x + 12)$

E) $\sigma = 64(4x^2 + 6x + 9)$

GABARITO

Fixação

01. D 02. A 03. E 04. B 05. B

Propostos

01. C	09. C
02. C	10. E
03. E	11. C
04. D	12. C
05. C	13. D
06. C	14. E
07. D	15. A
08. E	16. D

Seção Enem

01. D 02. A

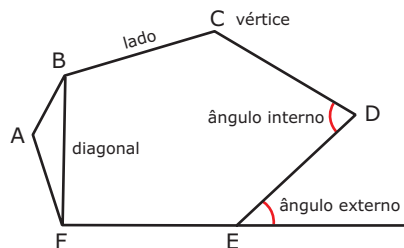
MATEMÁTICA

Polígonos

MÓDULO 05 FRENTE D

POLÍGONO

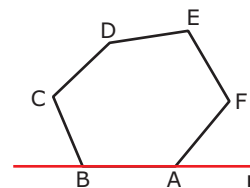
Um polígono é uma figura geométrica plana formada por segmentos de reta (não colineares dois a dois), tais que cada extremidade de qualquer um deles é comum a apenas um outro.

A seguir, temos um polígono com seis lados (hexágono) e seus principais elementos:

A tabela a seguir mostra os nomes que recebem os polígonos, conforme o seu número **n** de lados (ou de vértices).

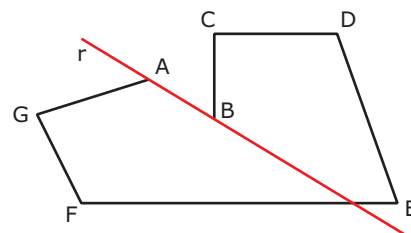
Nº de lados (Nº de vértices)	Nome do polígono
3	Triângulo
4	Quadrilátero
5	Pentágono
6	Hexágono
7	Heptágono
8	Octógono
9	Eneágono
10	Decágono
11	Undecágono
12	Dodecágono
15	Pentadecágono
20	Icoságono

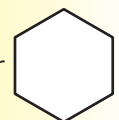
Aos demais polígonos, não daremos nomes especiais, referindo-nos a eles explicitando o seu número de lados.

POLÍGONO CONVEXO

Observe que a reta **r** que contém o lado $\overline{AB}$ do hexágono a seguir isola em um mesmo semiplano todos os demais lados do hexágono.

O mesmo acontece com as retas que contêm qualquer um dos outros lados. Por isso, dizemos que esse hexágono é convexo.

Um polígono é **convexo** se, e somente se, as retas que contêm qualquer um de seus lados deixam todos os demais lados contidos em um mesmo semiplano.

Observando o polígono ABCDEFG, constatamos que ele não é convexo, pois a reta **r** que contém o lado $\overline{AB}$ não deixa os demais lados contidos em um mesmo semiplano. O polígono que não é convexo é denominado polígono **côncavo**.

POLÍGONO REGULAR

Um polígono convexo que possui todos os lados congruentes entre si (equilátero) e todos os ângulos internos congruentes entre si (equiângulo) é chamado de **polígono regular**.

DIAGONAIS E SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS E EXTERNOS

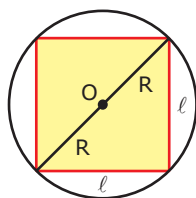
Se um polígono tem **n** lados, $n \geq 3$, então ele possui $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonais.	$d = \frac{n(n-3)}{2}$
A soma das medidas dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é $(n - 2)180°$.	$S_i = (n - 2)180°$
A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono convexo é 360°.	$S_e = 360°$

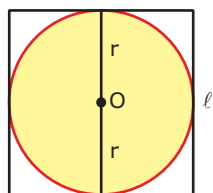
CIRCUNFERÊNCIAS CIRCUNSCRITA E INSCRITA EM POLÍGONOS REGULARES

Todo polígono regular admite a circunferência circunscrita (aquela que passa por todos os vértices do polígono) e a circunferência inscrita (aquela que tangencia todos os lados do polígono). Essas duas circunferências têm o mesmo centro **O**, chamado também de centro do polígono regular.

Vamos estudar o cálculo das medidas dos raios das circunferências circunscrita e inscrita em alguns polígonos regulares. Ao raio da circunferência inscrita em um polígono regular, damos o nome de apótema.

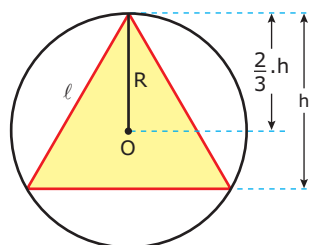
Quadrado

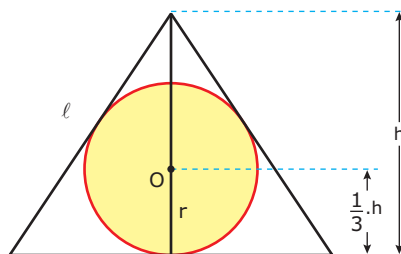
A medida da diagonal de um quadrado de lado ℓ é $\ell\sqrt{2}$. Portanto, temos:

Raio **R** da circunferência circunscrita:

$R = \frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

Raio **r** da circunferência inscrita (apótema):

$r = \frac{\ell}{2}$

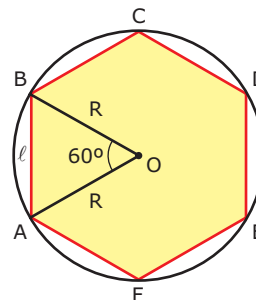
Triângulo equilátero

A medida da altura **h** de um triângulo equilátero de lado ℓ é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$. Como no triângulo equilátero as alturas estão contidas nas mediatrizes e coincidem com as bissetrizes e com as medianas, temos que o ponto comum às alturas é circuncentro (centro da circunferência circunscrita), é, também, incentro (centro da circunferência inscrita) e, também, é baricentro (divide cada mediana na razão 2 para 1).

Raio **R** da circunferência circunscrita:

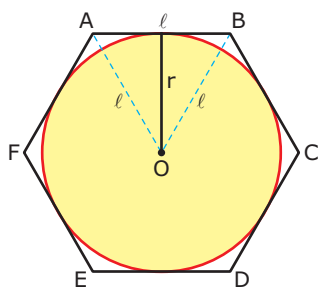
$$R = \frac{2}{3}.h \Rightarrow R = \frac{2}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{R = \frac{\ell\sqrt{3}}{3}}$$

Raio **r** da circunferência inscrita:

$$r = \frac{1}{3}.h \Rightarrow r = \frac{1}{3}.\frac{\ell\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{r = \frac{\ell\sqrt{3}}{6}}$$

Hexágono regular

Os vértices de um hexágono regular dividem a circunferência circunscrita em seis arcos congruentes; logo, cada um desses arcos mede 60°. Assim, o ângulo central correspondente a cada um desses arcos também mede 60°.

Como AO = OB e $A\hat{O}B = 60°$, temos que $O\hat{A}B = O\hat{B}A = 60°$ e, portanto, o triângulo AOB é equilátero. Sendo ℓ a medida do lado desse hexágono, concluímos que o raio **R** da circunferência circunscrita é:

$$R = \ell$$

Vamos analisar o caso em que a circunferência está inscrita em um hexágono regular.

Como **r** é a medida da altura de um triângulo equilátero de lado ℓ, então o raio **r** da circunferência inscrita (apótema) mede:

$$r = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

ÂNGULOS EM POLÍGONOS REGULARES

Ângulo cêntrico

Todos os ângulos cêntricos de um polígono regular são congruentes. Então, a medida de cada um deles é dada por:

$$a_c = \frac{360°}{n}$$

Ângulo interno

Como o polígono regular possui os **n** ângulos congruentes, a medida de cada um deles é dada por:

$$a_i = \frac{S_i}{n} = \frac{(n-2)180°}{n}$$

Ângulo externo

Como todos os ângulos externos são congruentes, a medida de cada um dos **n** ângulos externos é dada por:

$$a_e = \frac{S_e}{n} = \frac{360°}{n}$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UNITAU-SP) O polígono regular convexo em que o número de lados é igual ao número de diagonais é o

A) dodecágono.
B) pentágono.
C) decágono.
D) hexágono.
E) heptágono.

02. (PUC Rio) Os ângulos internos de um quadrilátero medem 3x – 45, 2x + 10, 2x + 15 e x + 20 graus. O **MENOR** ângulo mede

A) 90°
B) 65°
C) 45°
D) 105°
E) 80°

03. (UFSCar-SP) A figura 1 representa um determinado encaixe no plano de 7 ladrilhos poligonais regulares (1 hexágono, 2 triângulos, 4 quadrados), sem sobreposições e sem cortes.

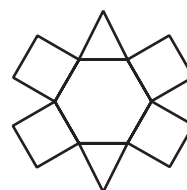



Figura 1

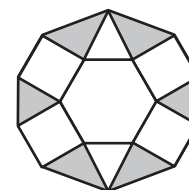



Figura 2

Em relação aos 6 ladrilhos triangulares colocados perfeitamente nos espaços da figura 1, como indicado na figura 2, é **CORRETO** dizer que

A) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 15°.
B) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
C) 2 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 50° e 4 são triângulos isósceles de ângulo da base medindo 30°.
D) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos retângulos isósceles.
E) 2 são triângulos equiláteros e 4 são triângulos escalenos.

04. (Mackenzie-SP) Os ângulos externos de um polígono regular medem 20°. Então, o número de diagonais desse polígono é

A) 90
B) 104
C) 119
D) 135
E) 152

05. (UFU-MG) Sabendo-se que um polígono regular de **n** lados está inscrito num círculo de raio 1 e que o polígono possui 9 diagonais, **ENCONTRE** a medida do comprimento de seu lado.

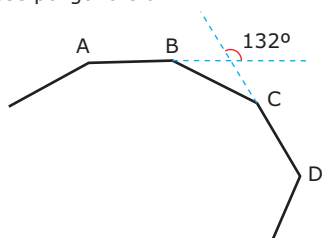
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC Rio) Um polígono regular de **n** lados tem 90 diagonais. O valor de **n** é

A) 10 B) 12 C) 15 D) 20 E) 21

02. (Cesgranrio) Se um polígono convexo de **n** lados tem 54 diagonais, então **n** é

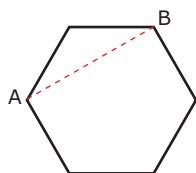
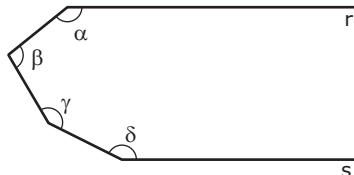
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

03. (UFJF-MG) Prolongando-se os lados AB e CD de um polígono convexo regular ABCD..., obtém-se um ângulo de 132° conforme ilustra a figura. De acordo com o número de lados, esse polígono é um

A) octógono.
B) decágono.
C) undecágono.
D) pentadecágono.
E) icoságono.

04. (Unificado-RJ) ABCDE é um pentágono regular convexo. O ângulo das diagonais AC e AD vale

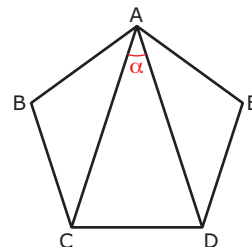
A) 30° B) 36° C) 45° D) 60° E) 72°

05. (PUC-SP) A figura mostra um hexágono regular de lado **a**. A diagonal $\overline{AB}$ mede

A) $2a$
B) $a\sqrt{2}$
C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
D) $a\sqrt{3}$
E) $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$

06. (UFES) Na figura, as retas **r** e **s** são paralelas. A soma $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ dos ângulos indicados na figura é

A) 180°
B) 270°
C) 360°
D) 480°
E) 540°

07. (UFES) Um polígono regular possui, a partir de cada um de seus vértices, tantas diagonais quantas são as diagonais de um hexágono. Cada ângulo interno desse polígono mede, em graus,

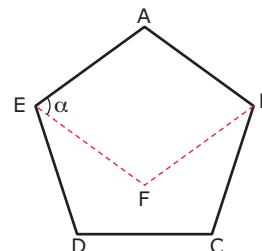
A) 140
B) 150
C) 155
D) 160
E) 170

08. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, ABCDE é um pentágono regular. A medida, em graus, do ângulo α é

A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

09. (Unifor-CE–2007) Os lados de um octógono regular são prolongados até que se obtenha uma estrela. A soma das medidas dos ângulos internos dos vértices dessa estrela é

A) 180° B) 360° C) 540° D) 720° E) 900°

10. (Mackenzie-SP) Na figura, ABCDE é um pentágono regular, $\overline{EF}$ é paralelo a $\overline{AB}$ e $\overline{BF}$ é paralelo a $\overline{AE}$. A medida do ângulo α é

A) 72°
B) 54°
C) 60°
D) 76°
E) 36°

11. (ITA-SP) De dois polígonos convexos, um tem a mais que o outro 6 lados e 39 diagonais. Então, a soma total dos números de vértices e de diagonais dos dois polígonos é igual a

A) 63 B) 65 C) 66 D) 70 E) 77

12. (UFU-MG) Considere um polígono regular de **n** lados, circunscrito a um círculo de raio 1 cm. O valor de **n**, para que o lado desse polígono tenha medida 2 cm, é igual a

A) 8 B) 6 C) 5 D) 4

13. (PUC-SP) Cada ângulo interno de um decágono regular mede

A) 36° B) 60° C) 72° D) 120° E) 144°

14. (UEL-PR) Se um círculo de 5 cm de raio está inscrito em um hexágono regular, o perímetro do hexágono, em centímetros, é igual a

A) $20\sqrt{3}$
B) $18\sqrt{3}$
C) $15\sqrt{2}$
D) $12\sqrt{3}$
E) $9\sqrt{2}$

15. (UFSCar-SP) Um polígono regular com exatamente 35 diagonais tem

A) 6 lados.
B) 9 lados.
C) 10 lados.
D) 12 lados.
E) 20 lados.

16. (Unicamp-SP) O polígono convexo cuja soma dos ângulos internos é 1 440° tem, exatamente,

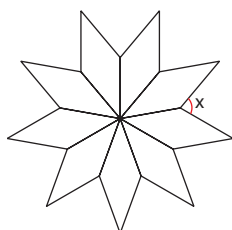
A) 15 diagonais.
B) 20 diagonais.
C) 25 diagonais.
D) 30 diagonais.
E) 35 diagonais.

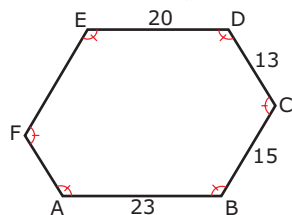
17. (FUVEST-SP) Dois ângulos internos de um polígono convexo medem 130° cada um e os demais ângulos internos medem 128° cada um. O número de lados do polígono é

A) 6 B) 7 C) 13 D) 16 E) 17

18. (VUNESP) A distância entre dois lados paralelos de um hexágono regular é igual a $2\sqrt{3}$ cm. A medida do lado desse hexágono, em centímetros, é

A) $\sqrt{3}$ B) 2 C) 2,5 D) 3 E) 4

19. (Unifor-CE) A figura a seguir é formada por losangos, todos congruentes entre si. A medida **x** do ângulo assinalado é

A) 100° B) 90° C) 80° D) 70° E) 60°

20. (UFSC–2006) Considere um hexágono equiângulo (ângulos internos iguais) no qual quatro lados consecutivos medem 20 cm, 13 cm, 15 cm e 23 cm, conforme figura a seguir. **CALCULE** o perímetro do hexágono.

SEÇÃO ENEM

01. (Enem–2002) Na construção civil, é muito comum a utilização de ladrilhos ou azulejos com a forma de polígonos para o revestimento de pisos ou paredes. Entretanto, não são todas as combinações de polígonos que se prestam a pavimentar uma superfície plana, sem que haja falhas ou superposições de ladrilhos, como ilustram as figuras:

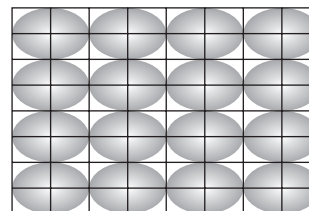



Figura 1: Ladrilhos retangulares que pavimentam o plano.

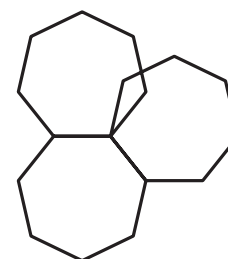



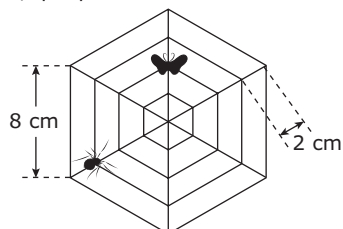
Figura 2: Heptágonos regulares não pavimentam o plano (há falhas ou superposição).

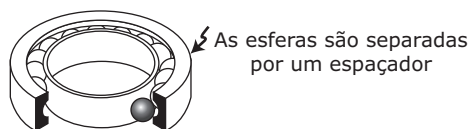
A tabela traz uma relação de alguns polígonos regulares, com as respectivas medidas de seus ângulos internos.

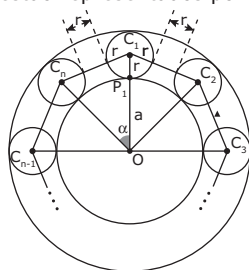
Nome	Triângulo	Quadrado	Pentágono	Hexágono	Octógono	Eneágono
Figura						
Ângulo interno	60º	90º	108º	120º	135º	140º

Se um arquiteto deseja utilizar uma combinação de dois tipos diferentes de ladrilhos entre os polígonos da tabela, sendo um deles octogonal, o outro tipo escolhido deverá ter a forma de um

A) triângulo.
B) quadrado.
C) pentágono.
D) hexágono.
E) eneágono.

02. As aranhas são notáveis geômetras, já que suas teias revelam variadas relações geométricas. No desenho, a aranha construiu sua teia de maneira que essa é formada por hexágonos regulares igualmente espaçados. A aranha anda sobre o fio de sua teia e percorre 2 cm a cada meio segundo. Qual é o menor tempo que a aranha deve gastar, andando ao longo da teia, para alcançar o infeliz inseto, que permanece imóvel?

A) 1,5 segundo
B) 2,0 segundos
C) 2,5 segundos
D) 3,0 segundos
E) 6,0 segundos

03. Rolamento é um tipo de rolete usado para reduzir o atrito nas partes móveis de uma máquina. Como exemplo, podemos citar o eixo e a roda de carros, motos, bicicletas e outros. Observe a figura a seguir:

Quando a roda gira em torno do seu eixo, as esferas giram dentro do rolamento, em torno de seu centro, reduzindo, assim, o atrito entre eles. Observe, na ilustração a seguir, o polígono regular formado pelos centros das esferas. Sabe-se que todas as esferas possuem o mesmo raio (**r**) e são igualmente espaçadas. Na confecção do rolamento, podemos afirmar que

Os espaços entre as esferas estão representados por **r**

A) o ângulo **α** formado para um rolamento de exatamente 8 esferas é de 22,5°.
B) para um rolamento de exatamente 8 esferas, o valor de **a** mede 2r.
C) o polígono formado pelos centros das esferas possui soma dos ângulos internos igual a 1 800º, quando o rolamento possui exatamente 10 esferas.
D) para um rolamento de exatamente 6 esferas, o valor de **a** mede 2r.
E) no rolamento de 6 esferas, o ângulo central mede 90°.

GABARITO

Fixação

01. B
02. B
03. D
04. D
05. 1

Propostos

01. C
02. E
03. D
04. B
05. D
06. E
07. B
08. C
09. D
10. A
11. B
12. D
13. E
14. A
15. C
16. E
17. B
18. B
19. C
20. 99 cm

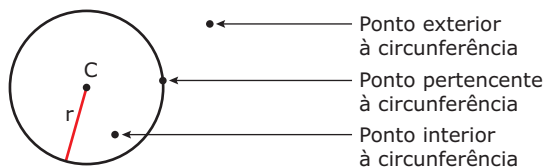
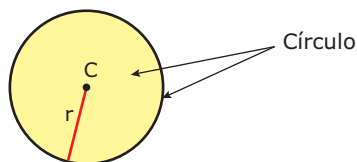
Seção Enem

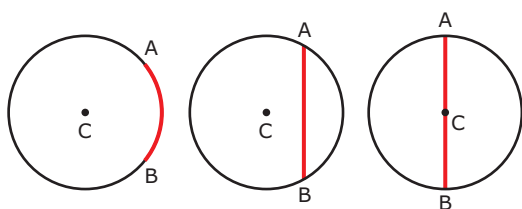
01. B
02. C
03. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 06 FRENTE D

Ângulos na circunferência

Sendo **C** um ponto de um plano **α** e **r** uma medida positiva, chama-se circunferência de centro **C** e raio **r** o conjunto dos pontos do plano **α** que distam de **C** a medida **r**.

A reunião de uma circunferência com o conjunto de seus pontos interiores é chamada de **círculo**.

Arcos e cordas

Dois pontos **A** e **B** de uma circunferência dividem-na em duas partes chamadas **arcos**. O segmento de reta $\overline{AB}$ é chamado de **corda**. Uma corda que passa pelo centro **C** da circunferência é chamada de **diâmetro**.

PERÍMETRO DA CIRCUNFERÊNCIA

Todas as circunferências são semelhantes entre si. Por isso, a razão entre a medida **C** do comprimento (perímetro) de uma circunferência e a medida 2r de seu diâmetro é constante, isto é:

$$\frac{C}{2r} = \text{constante}$$

A constante $\frac{C}{2r}$ é simbolizada pela letra grega **π** (pi), e sabe-se, hoje, que essa constante é um número irracional, isto é, tem infinitas casas decimais e não é periódica:

$$\pi = 3{,}14159265...$$

Da sentença $\frac{C}{2r} = \pi$, conclui-se que:

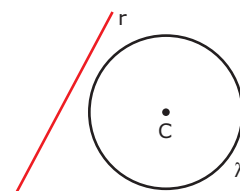
$$C = 2\pi r$$

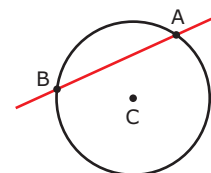
Portanto, o perímetro de uma circunferência é igual ao produto da medida do diâmetro por **π**.

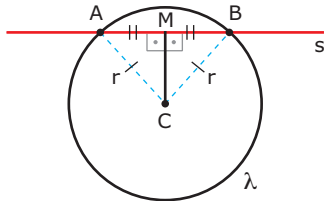
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

Uma reta **r** e uma circunferência **λ**, contidas em um mesmo plano, admitem as seguintes posições relativas:

Exterior

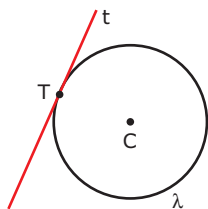
r é exterior a **λ** quando não há ponto comum entre elas.

Secante

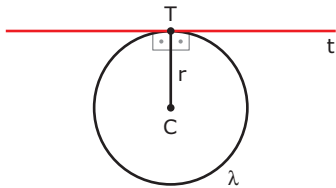
Uma secante a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência em dois pontos distintos.

Dizemos que a reta e a circunferência são secantes.

Propriedades da secante

i) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência **λ** (C, r), intercepta **λ** em dois pontos distintos **A** e **B** e se **M** é o ponto médio da corda $\overline{AB}$, então a reta $\overleftrightarrow{CM}$ é perpendicular à secante **s** (ou perpendicular à corda $\overline{AB}$).

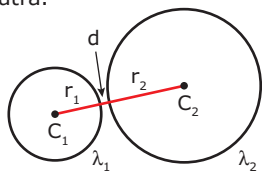
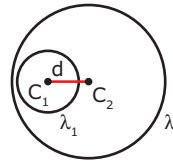
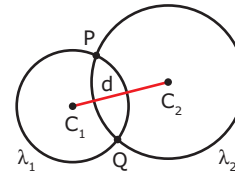
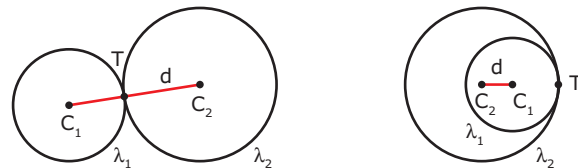
ii) Se uma reta **s**, secante a uma circunferência **λ** (C, r), intercepta **λ** em dois pontos distintos **A** e **B**, então a reta perpendicular à **s**, conduzida pelo centro **C**, passa pelo ponto médio da corda $\overline{AB}$.

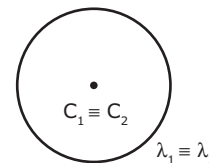
Tangente

Uma tangente a uma circunferência é uma reta que intercepta a circunferência num único ponto, denominado ponto de tangência.

Propriedade da tangente

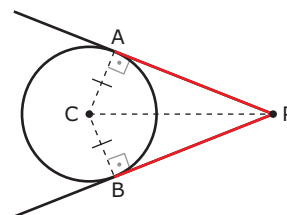
Toda reta é perpendicular a um raio na extremidade da circunferência se, e somente se, é tangente à circunferência.

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

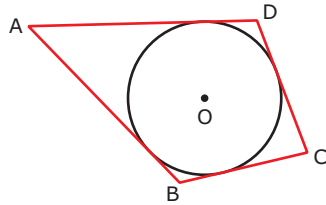
Duas circunferências λ_1 e λ_2, de centros C_1 e C_2 e de raios r_1 e r_2, contidas em um mesmo plano, admitem as posições relativas a seguir:

Externas: quando todos os pontos de qualquer uma delas são externos à outra.

Uma interna à outra: quando todos os pontos de uma delas são internos à outra.

Secantes: quando têm exatamente dois pontos distintos em comum.

Tangentes: quando têm um único ponto em comum.

Em duas circunferências tangentes, os centros C_1 e C_2 e o ponto de tangência **T** são colineares.

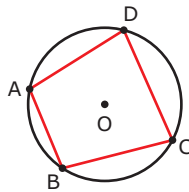
Coincidentes: quando possuem todos os seus pontos em comum.

QUADRILÁTEROS CIRCUNSCRITÍVEIS E INSCRITÍVEIS

Segmentos tangentes

Se de um ponto **P** conduzimos os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$, ambos tangentes a uma circunferência, com **A** e **B** na circunferência, então $\overline{PA} \equiv \overline{PB}$.

Quadrilátero circunscrito

Um quadrilátero convexo é circunscrito a uma circunferência se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.

A soma de dois lados opostos é igual à soma dos outros dois.

Quadrilátero inscrito

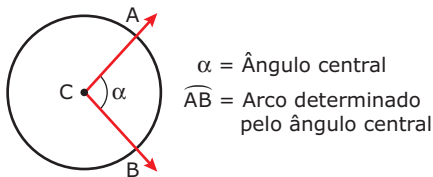
Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, tem os vértices numa circunferência.

Os ângulos opostos são suplementares.

ÂNGULOS NA CIRCUNFERÊNCIA

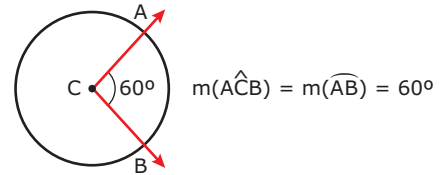
Ângulo central de uma circunferência

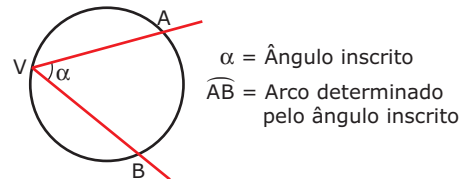
Todo ângulo cujo vértice é o centro de uma circunferência é chamado de **ângulo central** dessa circunferência.

α = Ângulo central

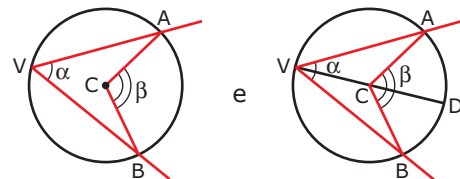
$\overset{\frown}{AB}$ = Arco determinado pelo ângulo central

$$\alpha = \overset{\frown}{AB}$$

Define-se a medida, em graus, de um arco de circunferência como sendo a medida do ângulo central que o determina.

Exemplo:

Ângulo inscrito em uma circunferência

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência e os lados são secantes a ela é chamado de **ângulo inscrito** dessa circunferência.

A medida do ângulo inscrito é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:

Traçando o ângulo central **β** e o diâmetro $\overline{VD}$ passando por **C**, temos:

Observe que os triângulos CVA e CVB são isósceles, portanto, $C\hat{V}A = C\hat{A}V$ e $C\hat{V}B = C\hat{B}V$.

No triângulo CVA, $A\hat{C}D$ é ângulo externo, assim

$$A\hat{C}D = C\hat{V}A + C\hat{A}V = 2.C\hat{V}A \Rightarrow C\hat{V}A = \frac{A\hat{C}D}{2}$$

No triângulo CVB, $B\hat{C}D$ é ângulo externo, assim:

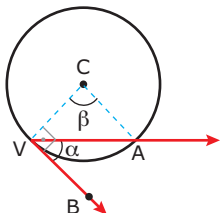
$$B\hat{C}D = C\hat{V}B + C\hat{B}V = 2.C\hat{V}B \Rightarrow C\hat{V}B = \frac{B\hat{C}D}{2}$$

$$\text{Como } \alpha = C\hat{V}A + C\hat{V}B = \frac{A\hat{C}D}{2} + \frac{B\hat{C}D}{2} \Rightarrow$$

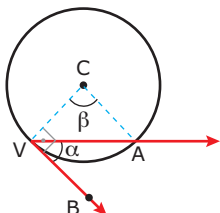
$$\alpha = \frac{1}{2}.(A\hat{C}D + B\hat{C}D) \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ângulo de segmento

Todo ângulo cujo vértice pertence a uma circunferência, sendo um lado tangente e o outro secante à circunferência, é chamado de **ângulo de segmento**.

Um ângulo de segmento e um ângulo central que determinam o mesmo arco são chamados de **ângulos correspondentes** dessa circunferência.

> A medida do ângulo de segmento é metade da medida do ângulo central correspondente.

Demonstração:

O ângulo $C\hat{V}A$ é complementar de $A\hat{V}B$.

Logo, $m(C\hat{V}A) = 90° - \alpha$.

Como o triângulo CVA é isósceles, pois $\overline{CV} \equiv \overline{CA}$, então $C\hat{V}A = C\hat{A}V = 90° - \alpha$. Assim, pela soma dos ângulos internos do ΔCVA:

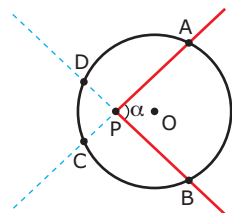
$$\beta + 90° - \alpha + 90° - \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = \beta \Rightarrow$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

Ângulo excêntrico

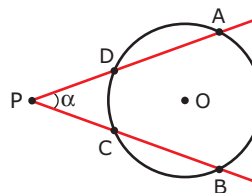
Interior

Se o vértice de um ângulo é interior à circunferência e não coincide com o centro da mesma, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico interior**.

> A medida de um ângulo excêntrico interior é igual à semissoma das medidas dos arcos interceptados por ele e por seu oposto pelo vértice.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}}{2}$$

Exterior

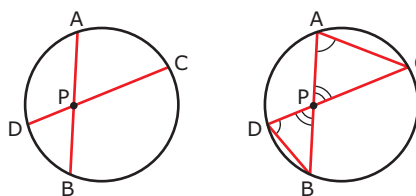
Se o vértice de um ângulo é exterior à circunferência e seus lados são secantes a ela, esse ângulo é chamado **ângulo excêntrico exterior**.

> A medida de um ângulo excêntrico exterior é igual à semidiferença das medidas dos arcos que ele intercepta.

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}}{2}$$

RELAÇÕES MÉTRICAS NA CIRCUNFERÊNCIA

Ponto interior à circunferência

Se, em uma circunferência, duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ concorrem em um ponto **P**, então:

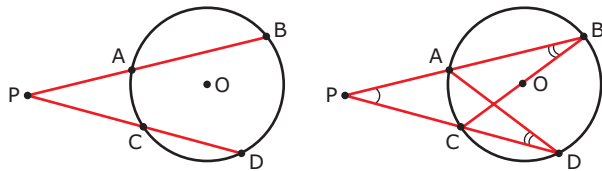
$$PA.PB = PC.PD$$

Demonstração:

Observe que os triângulos APC e DPB são semelhantes, pelo caso AA ($P\hat{A}C$ e $P\hat{D}B$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco, e $A\hat{P}C$ e $D\hat{P}B$ são opostos pelo vértice). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

Ponto exterior à circunferência

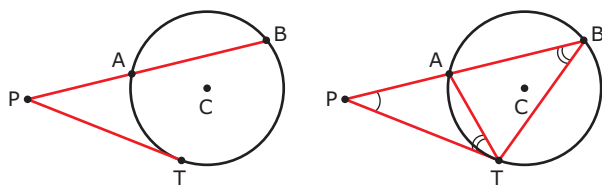
i) Se duas retas secantes $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{CD}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B**, **C** e **D**, conforme a figura a seguir, então:

PA.PB = PC.PD

Demonstração:

Observe que os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}C$ é ângulo comum aos dois triângulos, e $P\hat{B}C$ e $P\hat{D}A$ são ângulos inscritos que determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB} \Rightarrow PA.PB = PC.PD$$

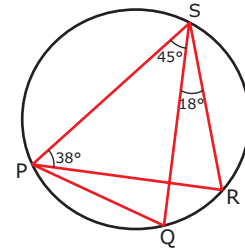
ii) Se uma reta secante $\overleftrightarrow{AB}$ e uma tangente $\overleftrightarrow{PT}$, concorrentes em **P**, interceptam uma circunferência em **A**, **B** e **T**, conforme a figura a seguir, então:

$(PT)^2$ = PA.PB

Demonstração:

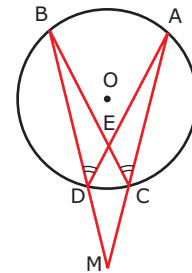
Observe que os triângulos PAT e PTB são triângulos semelhantes, pelo caso AA ($A\hat{P}T$ é um ângulo comum aos dois triângulos; e $P\hat{B}T$, inscrito na circunferência, e $P\hat{T}A$, ângulo de segmento, determinam o mesmo arco). Assim, temos a proporção:

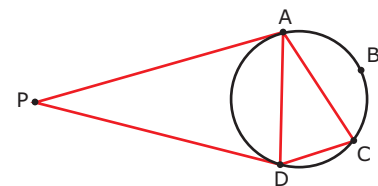
$$\frac{PT}{PA} = \frac{PB}{PT} \Rightarrow (PT)^2 = PA.PB$$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) Observe a figura.

Suponha que as medidas dos ângulos $P\hat{S}Q$, $Q\hat{S}R$, $S\hat{P}R$, assinalados na figura, sejam 45°, 18° e 38°, respectivamente. A medida do ângulo $P\hat{Q}S$, em graus, é

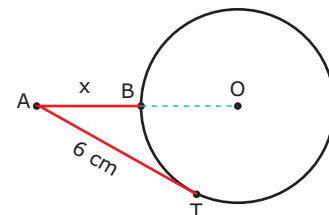
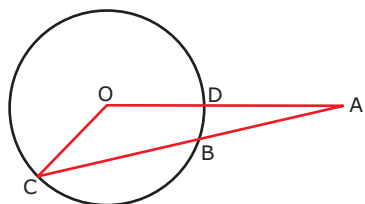
A) 38 B) 63 C) 79 D) 87

02. (Mackenzie-SP) Na figura a seguir, sabe-se que $C\hat{A}D$ = 20° e $C\hat{E}D$ = 70°. Então, $A\hat{M}B$ é igual a

A) 50°
B) 45°
C) 60°
D) 22°30'
E) 30°

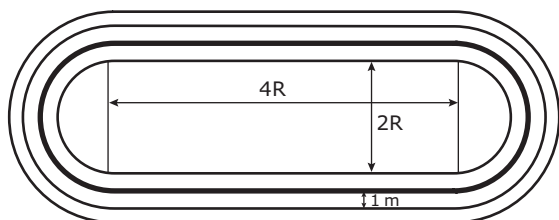
03. (UFES) Na figura, os segmentos de reta $\overline{AP}$ e $\overline{DP}$ são tangentes à circunferência, o arco $\widehat{ABC}$ mede 110 graus e o ângulo $C\hat{A}D$ mede 45 graus. A medida, em graus, do ângulo $A\hat{P}D$ é

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

04. (FUVEST-SP) O raio da circunferência da figura é 2,5 cm. AT = 6 cm (**T** é o ponto de tangência). Então, AB = x vale, em centímetros,

A) 2 B) 9 C) 3 D) 3,5 E) 4

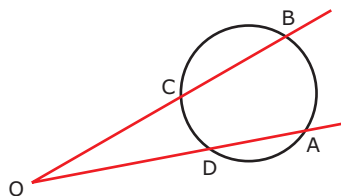
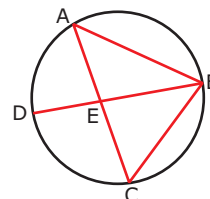
MATEMÁTICA

05. (Cesgranrio) Na figura a seguir, AB = 8 cm, BC = 10 cm, AD = 4 cm e o ponto **O** é o centro da circunferência. O perímetro do triângulo AOC mede, em cm,

A) 36 B) 45 C) 48 D) 50 E) 54

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFU-MG) Uma escola resolveu construir uma pista de atletismo em suas dependências. Essa pista deverá ser construída a partir de um retângulo de lados 4R e 2R com uma semicircunferência em cada extremidade, conforme mostra a figura a seguir. As raias terão 1 metro de largura.

Em qual intervalo, **R** (em metros) deverá ser escolhido para que o circuito, em negrito na figura, tenha 600 metros de comprimento?

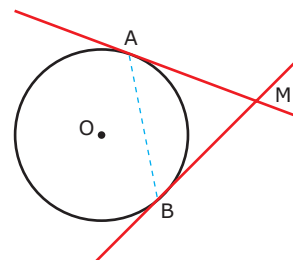
Observação: Utilize $\pi = 3,14$

A) (41, 42)
B) (40, 41)
C) (42, 43)
D) (39, 40)

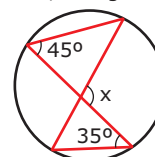
02. (UFPE) Na figura a seguir tem-se um círculo de raio 1; sobre este círculo, consideram-se arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{CD}$ medindo $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{9}$, respectivamente (ambos orientados no sentido anti-horário). Se α é a medida, em radianos, do ângulo $A\hat{O}B$, **CALCULE** $\left(\frac{144}{\pi}\right)\alpha$.

03. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, $\overline{BD}$ é um diâmetro da circunferência circunscrita ao triângulo ABC, e os ângulos $A\hat{B}D$ e $A\hat{E}D$ medem, respectivamente, 20° e 85°. Assim sendo, o ângulo $C\hat{B}D$ mede

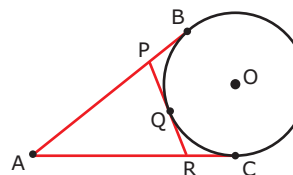
A) 25° B) 35° C) 30° D) 40º

04. (UFJF-MG) De um ponto **M**, exterior a um círculo de centro **O**, traçam-se as tangentes MA e MB, de acordo com a figura a seguir. Se a corda AB é um lado do triângulo equilátero inscrito nesse círculo, então a medida do ângulo $A\hat{M}B$ é

A) 40º B) 60º C) 90º D) 120º

05. (FUVEST-SP) Um arco de circunferência mede 300°, e seu comprimento é 2 km. Qual o número inteiro **MAIS PRÓXIMO** da medida do raio em metros?

A) 157 B) 284 C) 382 D) 628 E) 764

06. (PUC Minas) O ângulo **x**, na figura a seguir, mede

A) 60° B) 80° C) 90° D) 100° E) 120°

07. (UFCE) Duas tangentes são traçadas a um círculo de um ponto exterior **A** e tocam o círculo nos pontos **B** e **C**, respectivamente. Uma terceira tangente intercepta o segmento $\overline{AB}$ em **P** e $\overline{AC}$ em **R** e toca o círculo em **Q**. Se AB = 20 cm, então o perímetro do triângulo APR, em cm, é igual a

A) 39,5 B) 40 C) 40,5 D) 41 E) 41,5

08. (UFU-MG) Em um dado triângulo retângulo inscrevemos uma circunferência de diâmetro **d** e circunscrevemos outra de diâmetro **D**. O perímetro do triângulo vale

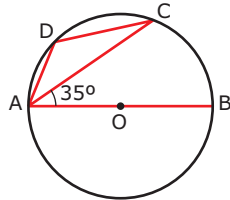
A) d + D C) d + 2D E) 2(d + D)

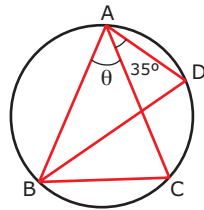
B) 2d + D D) $\frac{3}{2}$(d + D)

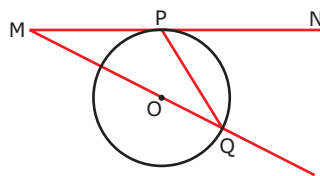
09. (FUVEST-SP) A medida do ângulo $A\hat{D}C$ inscrito na circunferência de centro **O** é

A) 125º D) 100º

B) 110º E) 135º

C) 120º

10. (PUC) Na figura a seguir, o triângulo ABC é isósceles e $\overline{BD}$ é a bissetriz do ângulo de vértice **B**. A medida do ângulo assinalado é

A) 55º B) 50º C) 45º D) 40º E) 35º

11. (UECE) Na figura, a reta MN é tangente à circunferência em **P**, a secante MQ passa pelo centro **O** da circunferência e a medida do ângulo $Q\hat{M}P$ é 40º. A medida do ângulo $N\hat{P}Q$ é igual a

A) 65º B) 60º C) 55º D) 50º

12. (Cesgranrio) Em um círculo de raio 5, está inscrito um quadrilátero ABCD. Sobre a soma dos ângulos opostos $B\hat{A}D$ e $B\hat{C}D$ podemos afirmar que vale

A) 5.180º D) 180º

B) 3.180º E) 90º

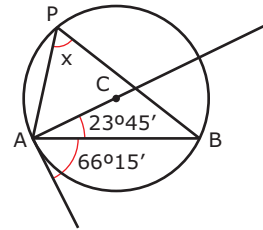
C) 2.180º

13. (ITA-SP) Numa circunferência, inscreve-se um quadrilátero convexo ABCD tal que $A\hat{B}C$ = 70º. Se x = $A\hat{C}B$ + $B\hat{D}C$, então

A) x = 120º D) x = 90º

B) x = 110º E) x = 80º

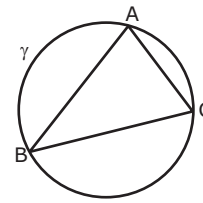
C) x = 100º

14. (Fatec-SP) Na figura a seguir, o triângulo APB está inscrito na circunferência de centro **C**.

Se os ângulos assinalados têm as medidas indicadas, então **x** é igual a

A) 23º45' D) 62º30'

B) 30º E) 66º15'

C) 60º

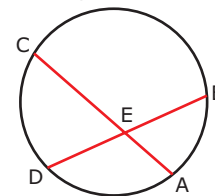
15. (FUVEST-SP) Os pontos **A**, **B** e **C** pertencem a uma circunferência **γ** e $\overline{AC}$ é lado de um polígono regular inscrito em **γ**. Sabendo-se que o ângulo $A\hat{B}C$ mede 18º, podemos concluir que o número de lados do polígono é igual a

A) 5 B) 6 C) 7 D) 10 E) 12

16. (UNESP) Seja ABCD um retângulo cujos lados têm as seguintes medidas: AB = CD = 6 cm e BC = DA = 1,2 cm. Se **M** é o ponto médio de $\overline{AB}$, então o raio da circunferência determinada pelos pontos **C**, **M** e **D** mede

A) 4,35 cm. D) 5,34 cm.

B) 5,35 cm. E) 4,45 cm.

C) 3,35 cm.

17. (UEBA) Na figura a seguir são dados $\frac{AE}{EC} = \frac{1}{3}$, BE = 8 cm e ED = 6 cm. O comprimento de $\overline{AC}$, em cm, é

A) 10 B) 12 C) 16 D) 18 E) 20

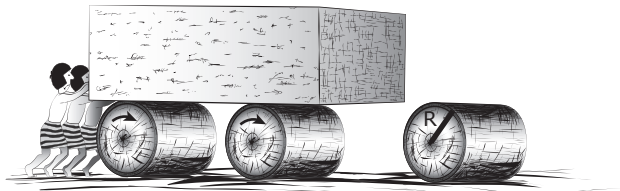
18. (ITA-SP) Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se **r** é o raio da circunferência inscrita e **a** é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma a + r (em cm) é igual a

A) 12 B) 11 C) 10 D) 9 E) 8

SEÇÃO ENEM

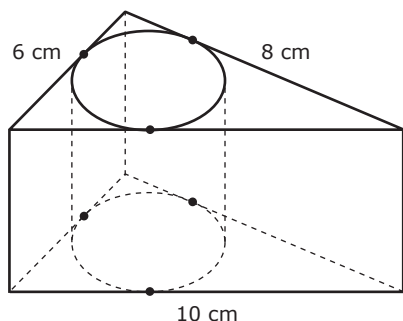
01. (Enem–2002) As cidades de Quito e Cingapura encontram-se próximas à Linha do Equador e em pontos diametralmente opostos no globo terrestre. Considerando o raio da Terra igual a 6 370 km, pode-se afirmar que um avião saindo de Quito, voando em média 800 km/h, descontando as paradas de escala, chega a Cingapura em aproximadamente

A) 16 horas.
B) 20 horas.
C) 25 horas.
D) 32 horas.
E) 36 horas.

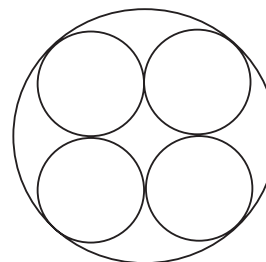
02. (Enem–2010) A ideia de usar rolos circulares para deslocar objetos pesados provavelmente surgiu com os antigos egípcios ao construírem as pirâmides.

BOLT, Brian. *Atividades matemáticas*. Ed. Gradiva.

Representando por **R** o raio da base dos rolos cilíndricos, em metros, a expressão do deslocamento horizontal **y** do bloco de pedra em função de **R**, após o rolo ter dado uma volta completa sem deslizar, é

A) $y = R$
B) $y = 2R$
C) $y = \pi R$
D) $y = 2\pi R$
E) $y = 4\pi R$

03. (Enem–2010) Uma metalúrgica recebeu uma encomenda para fabricar, em grande quantidade, uma peça com o formato de um prisma reto com base triangular, cujas dimensões da base são 6 cm, 8 cm e 10 cm e cuja altura é 10 cm. Tal peça deve ser vazada de tal maneira que a perfuração na forma de um cilindro circular reto seja tangente às suas faces laterais, conforme mostra a figura.

O raio da perfuração da peça é igual a

A) 1 cm.
B) 2 cm.
C) 3 cm.
D) 4 cm.
E) 5 cm.

04. (Enem–2010) Uma fábrica de tubos acondiciona tubos cilíndricos menores dentro de outros tubos cilíndricos. A figura mostra uma situação em que quatro tubos cilíndricos estão acondicionados perfeitamente em um tubo com raio maior.

Suponha que você seja o operador da máquina que produzirá os tubos maiores em que serão colocados, sem ajustes ou folgas, quatro tubos cilíndricos internos. Se o raio da base de cada um dos cilindros menores for igual a 6 cm, a máquina por você operada deverá ser ajustada para produzir tubos maiores, com raio da base igual a

A) 12 cm.
B) $12\sqrt{2}$ cm.
C) $24\sqrt{2}$ cm.
D) $6(1 + \sqrt{2})$ cm.
E) $12(1 + \sqrt{2})$ cm.

GABARITO

Fixação

01. C 02. E 03. B 04. E 05. E

Propostos

01. A
02. 4
03. A
04. B
05. C
06. B
07. B
08. C
09. A
10. D
11. A
12. D
13. B
14. E
15. D
16. A
17. C
18. C

Seção Enem

01. C 02. E 03. B 04. D

MATEMÁTICA

MÓDULO 09

FRENTE E

Posições relativas e distância de ponto a reta

POSIÇÕES RELATIVAS DE DUAS RETAS

Duas retas **r** e **s** de um plano podem ser:

- Paralelas $\begin{cases} \text{Distintas } r \cap s = \varnothing \\ \text{Coincidentes } r \cap s = r \Rightarrow r \equiv s \end{cases}$
- Concorrentes $r \cap s = \{P\}$

Consideremos, então, no plano cartesiano, duas retas (**r**) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e (**s**) $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, tais que nem **r** nem **s** sejam paralelas aos eixos coordenados, isto é, $a_1 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ e $b_2 \neq 0$.

Suas equações na forma reduzida são:

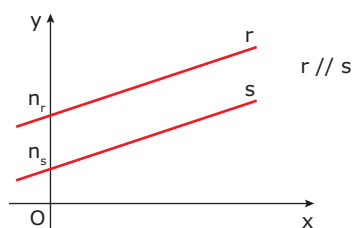
- (**r**) $a_1x + b_1y + c_1 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1}$
- (**s**) $a_2x + b_2y + c_2 = 0 \Rightarrow y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2}$

Na forma reduzida $y = mx + n$, **m** é o coeficiente angular, e **n** é o coeficiente linear da reta.

$$(\mathbf{r})\ y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = -\frac{a_1}{b_1} \\ n_1 = -\frac{c_1}{b_1} \end{cases}$$

$$(\mathbf{s})\ y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \begin{cases} m_2 = -\frac{a_2}{b_2} \\ n_2 = -\frac{c_2}{b_2} \end{cases}$$

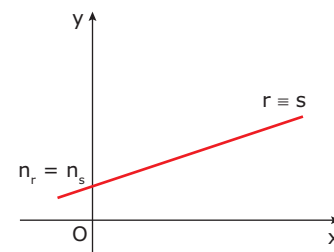
Portanto:

i) Se $m_r = m_s$ e $n_r \neq n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas distintas.

Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ e } -\frac{c_1}{b_1} \neq -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

E, reunindo as duas condições, temos:

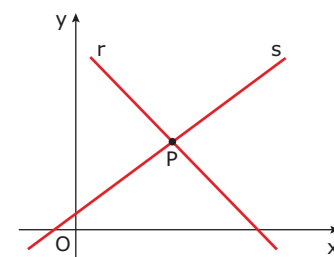
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$ (**r** e **s** paralelas distintas)

ii) Se $m_r = m_s$ e $n_r = n_s$, as retas **r** e **s** são paralelas coincidentes.

Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ e } -\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

E, reunindo as duas condições, temos:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$ (**r** e **s** paralelas coincidentes)

iii) Se $m_r \neq m_s$, as retas **r** e **s** são concorrentes.

Ou seja:

$$-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$ (**r** e **s** concorrentes)

Em resumo:

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ (paralelas distintas)

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Leftrightarrow$ (paralelas coincidentes)

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Leftrightarrow$ (concorrentes)

OBSERVAÇÕES

i) Se **r** é paralela a um dos eixos coordenados, o problema da posição relativa depende da reta **s**.

ii) Se **r** e **s** são concorrentes no ponto **P**, obtêm-se as coordenadas de **P** resolvendo o sistema formado pelas equações de **r** e **s**.

Exemplo

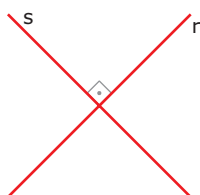
Sejam **r**: 3x + 4y − 5 = 0 e **s**: 6x + by + c = 0.

Então, $r \equiv s$ se: $\frac{3}{6} = \frac{4}{b} = -\frac{5}{c} \Rightarrow b = 8 \text{ e } c = -10$

$r \mathbin{//} s$, se: $b = 8$ e $c \neq -10$;

$r \times s$, se: $b \neq 8$ e $c \in \mathbb{R}$.

RETAS PERPENDICULARES

Duas retas **r** e **s** são perpendiculares uma à outra se, e somente se, são concorrentes e formam um ângulo reto.

Teorema

No plano cartesiano, duas retas **r** e **s** de coeficientes angulares m_r e m_s são perpendiculares entre si se, e somente se, $m_r.m_s = -1$.

$$r \perp s \Leftrightarrow m_r.m_s = -1 \Leftrightarrow m_r = -\frac{1}{m_s}$$

OBSERVAÇÃO

Se uma das retas é paralela a um dos eixos coordenados, então a reta perpendicular a ela é paralela ao outro eixo coordenado.

Exemplo

Dar a equação da mediatriz do segmento de extremos nos pontos A(2, 5) e B(6, 7).

Resolução:

A mediatriz é perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ pelo seu ponto médio.

Sendo x_M e y_M as coordenadas do ponto médio **M**, temos:

$$\left.\begin{array}{l} x_M = \frac{2+6}{2} = 4 \\ y_M = \frac{5+7}{2} = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow M(4, 6)$$

Coeficiente angular de $\overline{AB}$: $m_{AB} = \frac{7-5}{6-2} = \frac{1}{2}$

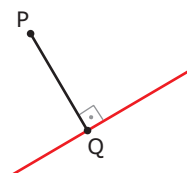
Sendo **m** o coeficiente angular da mediatriz, deve-se ter

$m.m_{AB} = -1 \Rightarrow m.\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow m = -2$

Portanto, a equação da mediatriz é:

$y - 6 = -2(x - 4) \Rightarrow y = -2x + 14$

DISTÂNCIA DE PONTO A RETA

A distância de um ponto **P** a uma reta **r** é a distância PQ, em que **Q** é a projeção ortogonal de **P** sobre a reta **r**.

Teorema

No plano cartesiano, a distância **d** do ponto $P(x_0, y_0)$ à reta **r**, de equação ax + by + c = 0, é dada pela expressão:

$$d(P, r) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

OBSERVAÇÃO

A fórmula da distância continua válida se **P** pertence a **r** (d = 0), ou, ainda, se b = 0, caso em que **r** é perpendicular ao eixo **x**.

Exemplo

Sejam P(2, −1) e **r**: $y = -\frac{3}{4}x + 1 \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$

Então: $d(P, r) = \frac{|3.(2) + 4.(-1) - 4|}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG) A relação entre **m** e **n**, para que as retas das equações $2x - my + 1 = 0$ e $nx + 3y + 5 = 0$ sejam paralelas, é

A) $\frac{m}{n} = \frac{2}{3}$

B) $\frac{m}{n} = -\frac{3}{2}$

C) $\frac{m}{n} = \frac{3}{2}$

D) $mn = -6$

E) $mn = 6$

02. (UFMG) Seja a reta **r** de equação $2x - 3y - 5 = 0$. A equação da reta **s**, paralela a **r**, que contém P(1, –2), é

A) $2x - 3y - 1 = 0$

B) $2x - 3y - 8 = 0$

C) $3x - 2y - 7 = 0$

D) $3x + 2y + 1 = 0$

E) $2x + 3y + 4 = 0$

03. (UFMG) A reta determinada pelos pontos P(a, 0) e Q(0, 2) é perpendicular à reta $3x - 2y - 4 = 0$. A abscissa do ponto **P** é

A) 3

B) $\frac{3}{2}$

C) $\frac{4}{3}$

D) $-\frac{4}{3}$

E) –3

04. (UFMG) As retas perpendiculares à reta de equação $3x + 4y - 9 = 0$ que distam 4 unidades da origem são

A) $4x - 3y = 5$ e $4x - 3y = -5$

B) $4x - 3y = 20$ e $4x - 3y = -20$

C) $4x - 3y = 4$ e $4x - 3y = -4$

D) $3x - 4y = 10$ e $3x + 4y = -10$

E) $4x - 3y = 10$ e $4x - 3y = -10$

05. (PUC-SP) Sejam **A**, **B**, **C** e **D** vértices consecutivos de um quadrado, tais que A = (1, 3) e **B** e **D** pertencem à reta de equação $x - y - 4 = 0$. A área desse quadrado, em unidades de superfície, é igual a

A) $36\sqrt{2}$

B) 36

C) $32\sqrt{2}$

D) 32

E) $24\sqrt{2}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (VUNESP) Sabendo que o ΔABC é um triângulo retângulo (B = 90°), as coordenadas do vértice **C** são

A) 5, –2

B) $3\frac{1}{2}$, –2

C) 4, –2

D) $4\frac{1}{2}$, –2

E) N.d.a

02. (FUVEST-SP) As retas **r** e **s** são perpendiculares e interceptam-se no ponto (2, 4). A reta **s** passa pelo ponto (0, 5). Uma equação da reta **r** é

A) $2y + x = 10$

B) $y = x + 2$

C) $2y - x = 6$

D) $2x + y = 8$

E) $y = 2x$

03. (UFPE) Considere o triângulo de vértices A(1, 1), B(3, 2) e C(2, 3). A equação da reta que contém a altura desse triângulo relativa ao lado $\overline{AC}$ é dada por

A) $x - 2y = 7$

B) $2x + 2y = -7$

C) $2y - x = 7$

D) $x + 2y = 7$

E) $x + 2y = -7$

04. (UFMG) A reta **r** passa pelo ponto (16, 11) e não intercepta a reta de equação $y = \frac{x}{2} - 5$. Considerando-se os seguintes pontos, o **ÚNICO** que pertence à reta **r** é

A) (7, 6)

B) $\left(7, \frac{13}{2}\right)$

C) (7, 7)

D) $\left(7, \frac{15}{2}\right)$

05. (UFTM-MG–2010) A figura apresenta uma circunferência de centro **O** e um diâmetro $\overline{AB}$ no plano de coordenadas cartesianas. As coordenadas de **A** e **B** são dadas na figura. Sendo $A\hat{O}C$ um ângulo reto, a reta que contém o diâmetro que passa pelo ponto **C** pode ser expressa pela equação

A) $x - \frac{1}{2}y = 10$

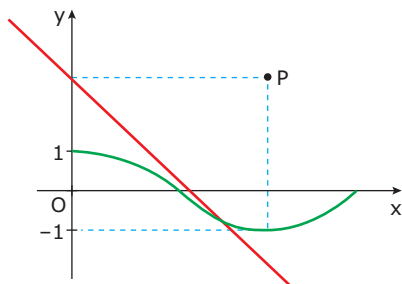
B) $2x - \frac{1}{3}y = 12$

C) $4x - 3y = 15$

D) $5x - 4y = 18$

E) $6x - 8y = 21$

MATEMÁTICA

06. (Mackenzie-SP–2009) No sistema cartesiano ortogonal, a reta $3x + 2y - 6 = 0$ intercepta a curva $y = \cos x$, conforme figura. A distância do ponto **P** à reta dada é

A) $\frac{3\pi}{2\sqrt{13}}$

B) $\frac{3\pi - 2}{\sqrt{13}}$

C) $\frac{3\pi + 2}{\sqrt{13}}$

D) $\frac{3\pi - 4}{2\sqrt{13}}$

E) $\frac{3\pi}{\sqrt{13}}$

07. (UCSal-BA) Considere o triângulo de vértices A(0, 0), B(1, 4) e C(4, 1). Sua altura em relação à base $\overline{BC}$ mede

A) $2\sqrt{2}$ B) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ C) 4 D) $4\sqrt{2}$ E) $5\sqrt{2}$

08. (UFMG) A distância entre as retas de equações $y = \sqrt{3}x$ e $y = \sqrt{3}x + 2$ é

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 1 E) 2

09. (FUVEST-SP) São dados os pontos A(1, 1) e B(9, 3). A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ encontra o eixo dos **y** no ponto de ordenada igual a

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

10. (UFRGS) As retas paralelas $y = ax + 2$ e $y = (5 + 2b)x - 1$ são perpendiculares à reta $y = \frac{2}{b}x + 3$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$. O valor de a + b é

A) –2 B) –1 C) 0 D) 1 E) 2

11. (Mackenzie-SP) A distância da reta determinada pelos pontos A(1, 4) e B(5, 2) à origem é

A) 9 B) 5 C) $\frac{9}{5}$ D) $\frac{81}{5}$ E) $\frac{9\sqrt{5}}{5}$

12. (FUVEST-SP) Os pontos M(2, 2), N(–4, 0) e P(–2, 4) são, respectivamente, os pontos médios dos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$ do triângulo ABC. A reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$ tem a equação

A) $x + 2y - 6 = 0$

B) $x - 2y + 2 = 0$

C) $2x - 2y - 2 = 0$

D) $2x + y - 6 = 0$

E) $-x + 2y + 6 = 0$

13. (Mackenzie-SP) Conhecidas as equações das retas **r**: $mx + y - 3 = 0$ e **s**: $3x + y + k = 0$, podemos afirmar que **r** e **s** são retas

A) paralelas, se m = 3 e k = –3.

B) coincidentes, se m = 3 e k ≠ –3.

C) concorrentes, se m ≠ 3, $k \in \mathbb{R}$.

D) concorrentes, se k = –3, $m \in \mathbb{R}$.

E) paralelas, se m = 3, $k \in \mathbb{R}$.

SEÇÃO ENEM

01. Considere uma cidade em que as ruas são representadas por retas e as casas, por pontos. Num mapa cartesiano dessa cidade, com medidas em km, a padaria Pannetutti se localiza no ponto P(–5, 0) e o açougue Quasar se localiza no ponto Q(–1, –3). Uma pessoa que estiver na origem desse mapa e quiser se dirigir à Rua Pedro Quintão, na qual se localizam a padaria e o açougue, terá de caminhar uma distância de, no mínimo,

A) 2 km.

B) 2,5 km.

C) 3 km.

D) 3,5 km.

E) 4 km.

02. Num sistema cartesiano, um trem segue uma trajetória retilínea dada pela reta $2x + 3y - 6 = 0$. A menor distância entre uma cidade localizada no ponto $P(3, \sqrt{13})$ e o trem é

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

GABARITO

Fixação

01. D 02. B 03. A 04. B 05. B

Propostos

01. C
02. E
03. D
04. B
05. C
06. E
07. B
08. D
09. C
10. B
11. E
12. A
13. C

Seção Enem

01. C 02. C

MATEMÁTICA

Áreas e teoria angular

MÓDULO 10 — FRENTE E

ÁREA DE UM TRIÂNGULO

A área **S** de um triângulo de vértices $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ é dada por:

$$S = \frac{1}{2}|D|, \text{ em que } D = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}$$

OBSERVAÇÕES

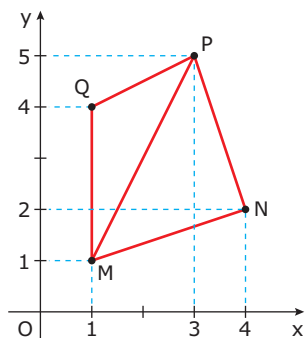
i) Se $D = 0$, então os pontos **A**, **B** e **C** são colineares.

ii) Para se calcular a área de um polígono, podemos dividi-lo em triângulos e calcular a soma das áreas de cada um deles.

Exemplo

Calcular a área do quadrilátero de vértices M(1, 1), N(4, 2), P(3, 5) e Q(1, 4).

Resolução:

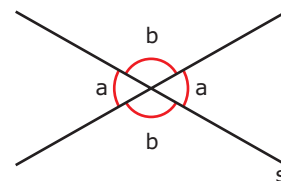
Observando-se o esboço a seguir, obtemos a área do quadrilátero somando as áreas dos triângulos MNP e PQM.

Sejam D_{MNP} o determinante dos pontos **M**, **N** e **P** e D_{PQM} o determinante dos pontos **P**, **Q** e **M**.

Assim, temos:

$$D_{MNP} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 10 \text{ e } D_{PQM} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Portanto, $S_{MNPQ} = S_{MNP} + S_{PQM} = \frac{1}{2}|10| + \frac{1}{2}|6| = 8$.

ÂNGULO AGUDO ENTRE DUAS RETAS CONCORRENTES

Se duas retas **r** e **s** são concorrentes e não perpendiculares, elas determinam dois ângulos agudos **a** opostos pelo vértice e dois ângulos obtusos **b** opostos pelo vértice, tais que $a + b = 180°$ e $\text{tg } a = -\text{tg } b$.

Teorema

Sejam (**r**) $y = m_r x + n_r$ e (**s**) $y = m_s x + n_s$ duas retas concorrentes e não perpendiculares ($m_r . m_s \neq -1$).

O ângulo agudo **φ** entre elas é tal que:

$$\text{tg } \varphi = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r . m_s}\right|$$

Caso particular

Sejam (**r**) $y = m_r x + n_r$, $m_r \neq 0$, e (**s**) $x = k$.

O ângulo agudo **φ** entre elas é tal que:

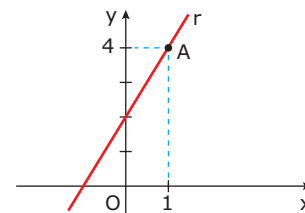
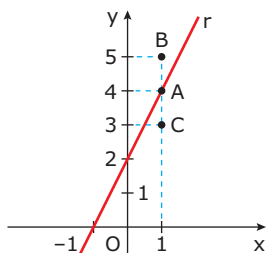
$$\text{tg } \varphi = \left|\frac{1}{m_r}\right|$$

Exemplo

Sejam **r**: $y = 2x + 7$ e **s**: $y = -3x$.

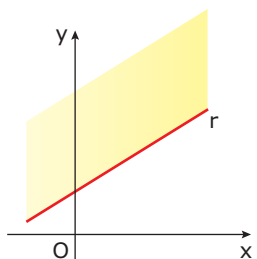
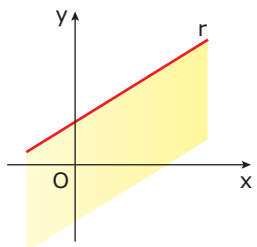
Então, $\text{tg } \varphi = \left|\frac{2 - (-3)}{1 + 2(-3)}\right| = \left|\frac{5}{-5}\right| = |-1| = 1 \Rightarrow \varphi = 45°$.

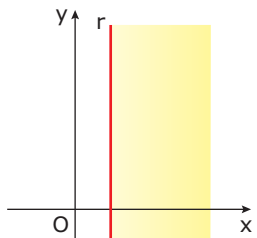
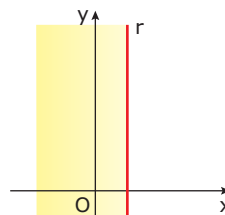
POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E RETA

Consideremos, por exemplo, a reta **r** de equação reduzida $y = 2x + 2$, cujo gráfico é a figura a seguir, e o ponto A(1, 4). Observe que o ponto **A** pertence a **r**, pois $4 = 2.1 + 2$.

Consideremos agora os pontos B(1, 5) e C(1, 3), que possuem abscissas iguais à de **A**. Como as ordenadas de **B** e **C** são diferentes da ordenada de **A**, tais pontos não pertencem à reta **r**.

Assim:

- Sendo $y_B = 5$, temos $y_B > y_A$; e, portanto, o ponto **B** está acima de **A**.
- Sendo $y_C = 3$, temos $y_C < y_A$; e, portanto, o ponto **C** está abaixo de **A**.

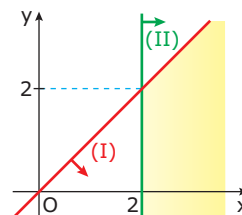
Portanto, se y = mx + n é a equação reduzida de uma reta **r**, então temos:

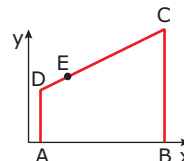
i) Os pontos que satisfazem a inequação y > mx + n estão acima da reta **r**.

ii) Os pontos que satisfazem a inequação y < mx + n estão abaixo da reta **r**.

Se a reta **r** é perpendicular ao eixo **x** e sua equação é x = k, de maneira análoga, concluímos que:

iii) Os pontos que satisfazem a inequação x > k, ou seja, os pontos de abscissa maior que **k**, estão à direita da reta **r**.

iv) Os pontos que satisfazem a inequação x < k, ou seja, os pontos de abscissa menor que **k**, estão à esquerda da reta **r**.

Exemplo

Esboçar a região do plano delimitada por:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \Rightarrow y \leq x \quad (I) \\ x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad (II) \end{cases}$$

Resolução:

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFMG–2006) Neste plano cartesiano, está representado o quadrilátero ABCD.

Sabe-se que

i) A(1, 0), C(11, 11) e E(3, 7).

ii) o ponto **B** está no eixo **x** e o ponto **E**, no lado $\overline{CD}$.

iii) os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ são paralelos ao eixo **y**.

Então, é **CORRETO** afirmar que a área do quadrilátero ABCD é

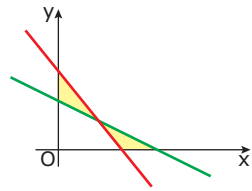
A) 87,5 B) 82,5 C) 85 D) 86

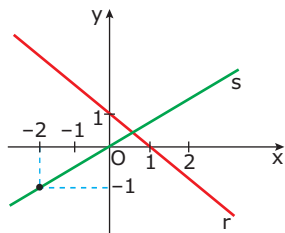
02. (UFJF-MG–2008) Considere o triângulo limitado pelas retas y = x, y = –x + 2 e y = ax, com a > 1. O valor de **a**, de forma que a área desse triângulo seja $\frac{\sqrt{2}}{2}$, é

A) $2\sqrt{2} + 3$
B) $3\sqrt{2} + 2$
C) $\sqrt{2} + 1$
D) $\sqrt{2} - 1$
E) $\sqrt{2}$

03. (UFMG) O ângulo agudo formado pelas retas de equações x = 0 e $\sqrt{3}x + y - 1 = 0$ mede

A) 15°
B) 22°30'
C) 30°
D) 37°30'
E) 45°

04. (Cesgranrio) As retas $y = -3x + 3$ e $y = -\frac{x}{2} + 2$ são mostradas na figura. A área da região hachurada é

A) 2,9 B) 3,0 C) 3,1 D) 3,2 E) 4,0

05. (FUVEST-SP) Na figura a seguir, **A** é um ponto do plano cartesiano, com coordenadas (x, y). Sabendo que **A** está localizado abaixo da reta **r** e acima da reta **s**, tem-se

A) $y < \frac{x}{2}$ e $y < -x + 1$

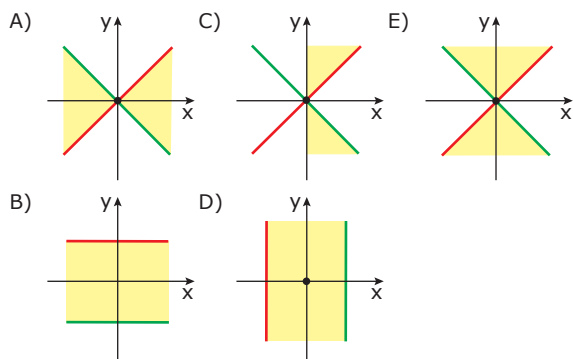
B) $y < \frac{x}{2}$ ou $y > -x + 1$

C) $\frac{x}{2} < y$ e $y > -x + 1$

D) $-x + 1 < y < \frac{x}{2}$

E) $\frac{x}{2} < y < -x + 1$

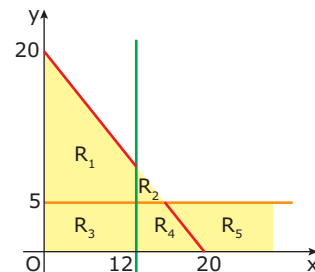
EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (PUC-SP) O conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano que satisfazem a inequação $(x + y)(x - y) \leq 0$ é a parte hachurada de qual das seguintes figuras?

02. (PUC Minas) Considere a região do plano cartesiano formada pelos pontos cujas coordenadas satisfazem ao

sistema $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y \geq x \\ y \leq 2x + 2 \end{cases}$

Tomando-se o metro como unidade de medida nos eixos coordenados, essa região é um trapézio com 2 m de altura e área igual a **A** metros quadrados. Então, o valor de **A** é

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6

03. (UFF-RJ) O elenco de um filme publicitário é composto de pessoas com cabelos louros ou olhos verdes. Sabe-se que esse elenco tem, no máximo, vinte pessoas entre as quais, pelo menos, doze possuem cabelos louros e, no máximo, cinco possuem olhos verdes. No gráfico a seguir, pretende-se marcar um ponto P(L, V), em que **L** representa o número de pessoas do elenco que têm cabelos louros e **V** o número de pessoas do elenco que têm olhos verdes.

O ponto **P** deverá ser marcado na região indicada por

A) R_1 B) R_2 C) R_3 D) R_4 E) R_5

04. (PUC-Campinas-SP) A parábola de equação $y = x^2 - 6$ tem vértice **M** e corta o eixo **x** nos pontos **A** e **B**. Qual a área do triângulo ABM?

A) 1

B) 6

C) $\sqrt{6}$

D) $6\sqrt{6}$

E) $12\sqrt{6}$

05. (UFRGS) Os pontos médios dos lados do quadrado ABCD, com A(1, 2) e B(4, 2), são vértices do quadrado de área igual a

A) 9

B) $\frac{9}{2}$

C) 3

D) $\frac{3}{2}$

E) $\frac{3}{4}$

06. (Mackenzie-SP–2007) Os gráficos de $y = x + 2$ e $x + y = 6$ definem, com os eixos, no primeiro quadrante, um quadrilátero de área

A) 12 B) 16 C) 10 D) 8 E) 14

07. (CEFET-MG–2010) Num supermercado em construção, serão instalados quatro terminais para consulta de preços. Considerando-se um sistema de coordenadas no plano do chão, os locais onde serão colocados os terminais coincidem com os pontos de interseção das retas de equações $y = 1$, $y = 2$, $y = x$ e $y = x - 3$, tomadas duas a duas. O polígono formado por esses pontos possui área igual a

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

08. (VUNESP) A área do triângulo formado pelas interseções das retas $x + y - 6 = 0$, $x = 1$ e $y = 1$ é igual a

A) 2 B) 4 C) 8 D) 16

09. (PUC Rio) Os pontos A(3, 1), B(4, –2) e C(x, 7) são colineares. O valor de **x** é igual a

A) 1 B) 2 C) 5 D) 6 E) 7

10. (FUVEST-SP) A reta de equação $2x + 12y - 3 = 0$, em relação a um sistema cartesiano ortogonal, forma com os eixos do sistema um triângulo cuja área é

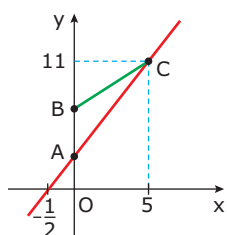
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{15}$ D) $\frac{3}{8}$ E) $\frac{3}{16}$

11. (UFMG) A área do triângulo limitado pelas retas $4x + 5y - 20 = 0$, $y = 0$ e $x = 0$ é

A) 4 B) 5 C) 10 D) 16 E) 20

12. (FGV-MG–2008) As interseções de $y = x$, $y = -x$ e $y = 6$ são vértices de um triângulo de área

A) 36 B) $24\sqrt{2}$ C) 24 D) $12\sqrt{2}$ E) 12

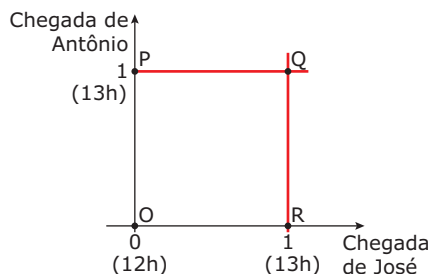
13. (UFMG) Observe a figura.

Nessa figura, a reta AC intercepta o eixo das abscissas no ponto $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, e a área do triângulo de vértices **A**, **B** e **C** é 10. Então, a ordenada do ponto **B** é

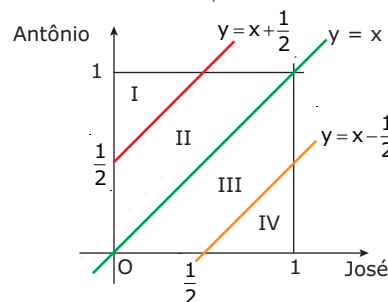
A) $\frac{20}{11}$ B) $\frac{31}{11}$ C) 4 D) 5 E) 6

SEÇÃO ENEM

(Enem–1999)

Instrução: Texto para a questão **01**.

José e Antônio viajarão em seus carros com as respectivas famílias para a cidade de Serra Branca. Com a intenção de seguir viagem juntos, combinam um encontro no marco inicial da rodovia, onde chegarão, de modo independente, entre meio-dia e 1 hora da tarde. Entretanto, como não querem ficar muito tempo esperando um pelo outro, combinam que o primeiro que chegar ao marco inicial esperará pelo outro, no máximo, meia hora; após esse tempo, seguirá viagem sozinho.

Chamando de **x** o horário de chegada de José e de **y** o horário de chegada de Antônio, e representando os pares (x, y) em um sistema de eixos cartesianos, a região OPQR indicada anteriormente corresponde ao conjunto de todas as possibilidades para o par (x, y).

01. Segundo o combinado, para que José e Antônio viagem juntos, é necessário que $y - x \leq \frac{1}{2}$ ou que $x - y \leq \frac{1}{2}$.

De acordo com o gráfico e nas condições combinadas, as chances de José e Antônio viajarem juntos são de

A) 0%. B) 25%. C) 50%. D) 75%. E) 100%.

02. Num mapa localizado sobre um sistema cartesiano, 3 cidades se localizam nos pontos A(2, 3), B(−5, 0) e C(4, −1). A área da região triangular determinada pelas cidades é

A) 15 u.a. C) 19 u.a. E) 23 u.a.
B) 17 u.a. D) 21 u.a.

GABARITO

Fixação

01. C 02. A 03. C 04. A 05. E

Propostos

01. E	08. C
02. D	09. A
03. D	10. E
04. D	11. C
05. B	12. A
06. E	13. D
07. B	

Seção Enem

01. D 02. B

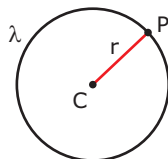
MATEMÁTICA

MÓDULO 11 | FRENTE E

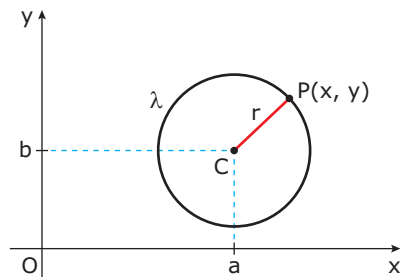
Circunferência

INTRODUÇÃO

Uma circunferência **λ** é o conjunto de todos os pontos do plano cuja distância a um ponto fixo **C** é uma constante positiva **r**.

C: Centro da circunferência;
r: Raio da circunferência.
Em símbolos: $P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$

EQUAÇÃO REDUZIDA DA CIRCUNFERÊNCIA

Consideremos uma circunferência **λ** de centro C(a, b) e raio **r**.

Obter uma equação da circunferência **λ** é encontrar uma relação entre as coordenadas **x** e **y** dos pontos do plano que pertencem a **λ**.

Seja P(x, y) um ponto genérico da circunferência. Temos:

$$P \in \lambda \Leftrightarrow PC = r$$

$$P \in \lambda \Leftrightarrow \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

$$P \in \lambda \Leftrightarrow (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Esta última igualdade é chamada de equação reduzida da circunferência de centro (a, b) e raio **r**.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Exemplos

1º) Dar a equação reduzida da circunferência de centro **C** e raio **r** nos seguintes casos:

A) C(1, 2) e r = 4

B) C(–1, 2) e r = 5

C) C(0, –3) e r = $\sqrt{3}$

D) C(0, 0) e r = 1

Resolução:

A) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 16$

B) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$

C) $x^2 + (y + 3)^2 = 3$

D) $x^2 + y^2 = 1$

2º) Dar o centro **C** e o raio **r** da circunferência nos seguintes casos:

A) $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 100$

B) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 16$

C) $(x + 4)^2 + y^2 = 9$

D) $x^2 + y^2 = 7$

Resolução:

A) C(3, 4) e r = 10

B) C(–3, 1) e r = 4

C) C(–4, 0) e r = 3

D) C(0, 0) e r = $\sqrt{7}$

OBSERVAÇÃO

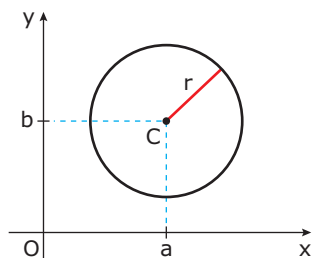
Considerando-se a equação $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$, temos:

i) Se $k > 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa uma circunferência de centro C = (a, b) e raio = $\sqrt{k}$.

ii) Se $k = 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o ponto P = (a, b), pois $(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0 \Rightarrow x - a = 0$ e $y - b = 0$.

iii) Se $k < 0$, então $(x - a)^2 + (y - b)^2 = k$ representa o conjunto vazio, pois a soma dos quadrados de dois números reais não pode ser negativa.

EQUAÇÃO NORMAL DA CIRCUNFERÊNCIA

Seja a circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

Sua equação reduzida é:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Desenvolvendo-se a equação reduzida, temos:

$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$

Logo, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Essa é a equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**.

Se uma circunferência é dada pela sua equação normal, pode-se determinar seu centro e raio por comparação ou completando-se a soma dos quadrados para obtermos a equação reduzida, conforme o exemplo a seguir:

Exemplo

Obter o centro e o raio da circunferência

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$.

Resolução:

Tem-se:

$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$

Reagrupando:

$x^2 - 2x + \ldots + y^2 + 4y + \ldots = 11$

$(x^2 - 2x + \ldots) + (y^2 + 4y + \ldots) = 11$

Adicionando 1 e 4 aos dois lados da equação para que o 1º e o 2º fatores sejam quadrados perfeitos, temos:

$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 11 + 1 + 4$

Fatorando:

$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$

Essa é a equação reduzida da circunferência.

Portanto, a circunferência tem centro C(1, –2) e raio 4.

OBSERVAÇÕES

Na equação normal da circunferência de centro C(a, b) e raio **r**, tem-se:

i) Os coeficientes de x^2 e y^2 são iguais a 1.

ii) Os coeficientes de **x** e de **y** são, respectivamente, o dobro com os sinais trocados, das coordenadas **a** e **b** do centro.

iii) Não existe termo da forma kxy, $k \neq 0$.

iv) $a^2 + b^2 - r^2$ é chamado termo independente.

Exemplo

Para que a equação $mx^2 + y^2 + 4x - 6y + nxy - p = 0$ represente uma circunferência, devemos ter:

$m = 1$ e $n = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4x - 6y = p \Rightarrow$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = p + 4 + 9 \Rightarrow$

$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = p + 13 > 0 \Rightarrow p > -13$

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UFPA) Qual das equações a seguir é a equação de uma circunferência?

A) $x^2 + y^2 + 1 = 0$

B) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 2xy + 2x + 4y = 64$

D) $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$

E) $x^2 + 2xy + y^2 = 3^2$

02. (UDESC) Para que a equação $x^2 + y^2 - 4x + 8y + k = 0$ represente uma circunferência, devemos ter

A) $k < 20$

B) $k > 13$

C) $k < 12$

D) $k > 12$

E) $k < 10$

03. (PUC Minas) A medida do raio da semicircunferência de equação $y = \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4x^2}$ é igual a

A) $\frac{2}{3}$

B) 2

C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{5}{2}$

E) 3

04. (FGV-SP) O ponto da circunferência $x^2 + y^2 = 1$ mais próximo do ponto (5, 5) tem coordenadas cuja soma vale

A) 2
B) $\sqrt{2}$
C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
E) $3\sqrt{2}$

05. (UEL-PR) Sejam A(–2, 1) e B(0, –3) as extremidades de um diâmetro de uma circunferência λ. A equação de λ é

A) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$
B) $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 20$
C) $(x – 1)^2 + (y – 1)^2 = 5$
D) $(x + 1)^2 + (y – 1)^2 = 20$
E) $(x – 1)^2 + (y + 1)^2 = 5$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFPA) Uma circunferência tem centro no ponto C(2, –1) e raio igual a $\sqrt{2}$. Qual é a equação dessa circunferência?

A) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
B) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$
C) $(x + 1)^2 + (y – 2)^2 = \sqrt{2}$
D) $(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$
E) $(x – 2)^2 + (y – 1)^2 = \sqrt{2}$

02. (FGV-SP–2010) Dada a circunferência de equação $x^2 + y^2 – 6x – 10y + 30 = 0$, seja **P** seu ponto de ordenada máxima. A soma das coordenadas de **P** é

A) 10 B) 10,5 C) 11 D) 11,5 E) 1

03. (UFRGS) A distância entre o ponto de interseção das retas $y = 5$ e $3x + 2y – 1 = 0$ e o centro da circunferência $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 1 = 0$ é

A) $\sqrt{5}$
B) $\sqrt{29}$
C) $\sqrt{40}$
D) $\sqrt{85}$
E) $\sqrt{89}$

04. (Fatec-SP) Sejam **O** a origem do sistema de eixos cartesianos e **A** o centro da circunferência de equação $x^2 + y^2 – 2x – 4y – 4 = 0$. A equação da reta que passa pelos pontos **A** e **O** é

A) $y = 2x + 1$
B) $y = 2x – 1$
C) $y = \frac{x}{2}$
D) $y = 2x$
E) $y = x$

05. (Unifor-CE) Seja a circunferência λ, de centro no ponto (1, –2). Se o ponto A(7, –10) pertence a λ, o seu raio é

A) $5\sqrt{2}$
B) 8
C) $8\sqrt{2}$
D) 10
E) $10\sqrt{2}$

06. (UFRGS) A equação $x^2 + y^2 + 4x – 6y + m = 0$ representa um círculo se, e somente se,

A) $m > 0$
B) $m < 0$
C) $m > 13$
D) $m > –13$
E) $m < 13$

07. (PUC-SP) A reta de equação $y = 2x – 4$ intercepta os eixos coordenados nos pontos **A** e **B**. Esses pontos são os extremos de um diâmetro da circunferência λ. A equação correspondente a λ é

A) $x^2 + y^2 – 2x + 4y – 5 = 0$
B) $x^2 + y^2 – 2x + 4y = 0$
C) $2x^2 + 4y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$
D) $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$
E) $x^2 + y^2 + 6x + 3y – 4 = 0$

08. (UFPA) Qual a equação da circunferência de raio 2 que é concêntrica à circunferência $x^2 + y^2 – 4x + 2y + 4 = 0$?

A) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{2}$
B) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 2$
C) $(x – 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$
D) $(x – 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$
E) $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 4$

09. (FGV-SP) Dado o ponto P(5, 4) e a circunferência de equação $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 20 = 0$, a equação da circunferência concêntrica com a circunferência dada e que passa por **P** é

A) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 20 = 0$
B) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 21 = 0$
C) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 22 = 0$
D) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 23 = 0$
E) $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 24 = 0$

10. (FUVEST-SP) O segmento $\overline{AB}$ é o diâmetro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 10y$. Se **A** é o ponto (3, 1), então **B** é o ponto

A) (–3, 9)
B) (3, 9)
C) (0, 10)
D) (–3, 1)
E) (1, 3)

11. (FJP-MG–2010) Considere a circunferência de centro C(3, 3) e tangente aos eixos coordenados. A soma das coordenadas do ponto dessa circunferência mais afastado da origem (0, 0) é

A) 9
B) $6 + 3\sqrt{2}$
C) $4 + 6\sqrt{2}$
D) $4 + 2\sqrt{3}$

MATEMÁTICA

12. (Unimontes-MG–2010) Quantos pontos têm em comum a parábola $3x^2 - y + 1 = 0$ e a circunferência $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$?

A) 2 pontos

B) 1 ponto

C) 4 pontos

D) 3 pontos

13. (PUC Minas) O raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - x + y + c = 0$ mede $\frac{3}{2}$ unidades de comprimento. Nessas condições, o valor da constante **c** é igual a

A) $-\frac{7}{4}$

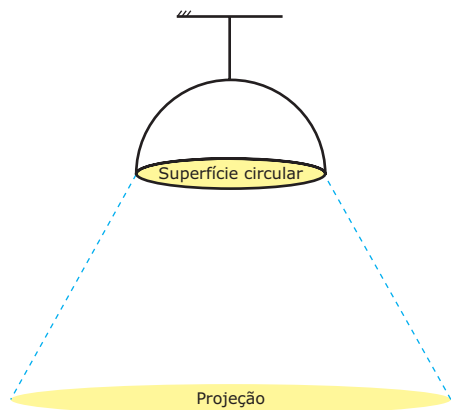
B) $-\frac{3}{2}$

C) -1

D) $\frac{1}{2}$

E) 1

SEÇÃO ENEM

01. Um holofote circular projeta no chão uma figura dada pela inequação $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 23 \leq 0$. Sabe-se que seu coeficiente de ampliação é 3, isto é, sua projeção possui uma área 3 vezes maior que sua superfície circular. O raio do círculo de sua superfície vale

A) $\sqrt{3}$

B) $2\sqrt{3}$

C) $3\sqrt{3}$

D) $4\sqrt{3}$

E) $5\sqrt{3}$

02. Num sistema cartesiano, todas as cidades de um estado que distam 10 km da capital satisfazem à equação $x^2 + y^2 - 20x + 40y + 400 = 0$. Então, a capital do estado está localizada no ponto

A) (10, 20)

B) (–20, 40)

C) (–10, –20)

D) (20, –40)

E) (10, –20)

GABARITO

Fixação

01. D
02. A
03. C
04. B
05. A

Propostos

01. B
02. A
03. E
04. D
05. D
06. E
07. B
08. C
09. D
10. A
11. B
12. D
13. A

Seção Enem

01. B
02. E

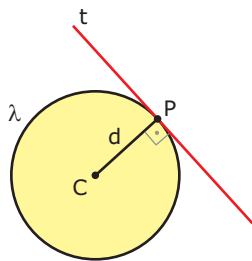
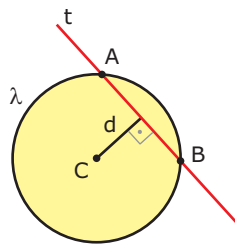
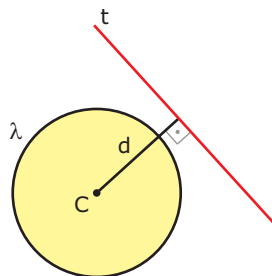
MATEMÁTICA

MÓDULO 12 FRENTE E

Posições relativas à circunferência

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UMA RETA E UMA CIRCUNFERÊNCIA

Considere, num plano, uma reta **t** e uma circunferência **λ** de centro **C** e raio **r**. Seja **d** a distância de **C** até a reta **t**. Em relação a **λ**, a reta **t** ocupa uma das três posições:

1ª) **t** é tangente a **λ** se, e somente se, d = r.

2ª) **t** é secante a **λ** se, e somente se, d < r.

3ª) **t** é exterior a **λ** se, e somente se, d > r.

Caso a reta **t** seja tangente ou secante à circunferência **λ**, obtemos os pontos de interseção resolvendo o sistema formado pelas equações de **t** e **λ**.

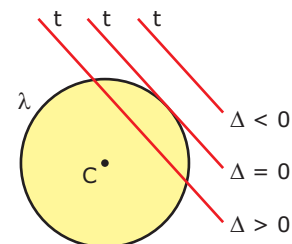
Assim, sendo Ax + By + C = 0 a equação de **t** e $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ a equação de **λ**, tem-se o sistema:

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 & \text{(I)} \\ (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Esse sistema pode ser resolvido facilmente pela substituição de (I) em (II), chegando-se a uma equação do 2º grau de uma incógnita. Sendo **Δ** o discriminante dessa equação, temos que:

i) Se Δ > 0, então a equação possui duas raízes reais e distintas (**t** é secante a **λ**).

ii) Se Δ = 0, então a equação possui duas raízes reais e iguais (**t** é tangente a **λ**).

iii) Se Δ < 0, então a equação não possui raízes reais (**t** é exterior a **λ**).

Exemplos

1º) Qual é a posição relativa entre a reta (**t**) y = x + 1 e a circunferência (**λ**) $x^2 + y^2 = 2$?

Resolução:

1º modo

Comparar o raio **r** com a distância **d** do centro da circunferência até a reta.

(**λ**) $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow C(0, 0)$ e $r = \sqrt{2}$

(**t**) x – y + 1 = 0

Logo:

$$d(C, t) = \frac{|0 - 0 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow d(C, t) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, $d < r \Rightarrow$ t é secante a **λ**.

2º modo

Resolver o sistema formado pelas equações de **t** e **λ**.

$$\begin{cases} y = x + 1 & \text{(I)} \\ x^2 + y^2 = 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II), temos:

$x^2 + (x + 1)^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow$

$\Delta = (2)^2 - 4.(2).(-1) = 12 \Rightarrow \Delta > 0$

Portanto, $\Delta > 0 \Rightarrow$ **t** é secante a **λ**.

2º) Dar a equação da circunferência do centro C(1, 2), tangente à reta (**t**) $3x + 4y + 4 = 0$.

Resolução:

O raio da circunferência é igual à distância do centro até a reta.

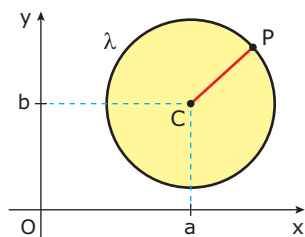
$$r = d(C, t) = \frac{|3.1 + 4.2 + 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{15}{5} = 3$$

Portanto, a equação da circunferência é:

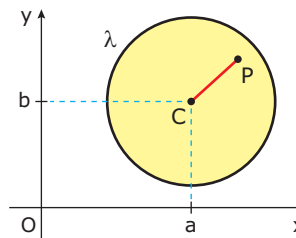
$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE UM PONTO E UMA CIRCUNFERÊNCIA

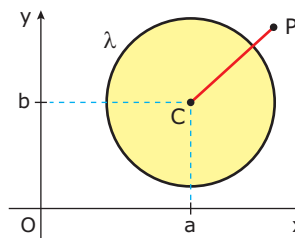
Consideremos, num plano cartesiano, uma circunferência **λ**: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Em relação a **λ**, um ponto $P(x_0, y_0)$ do plano ocupa uma das três posições:

i) **P** pertence a **λ** se, e somente se, PC = r.

Logo, $PC^2 = r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \Rightarrow$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = 0$$

ii) **P** é interior a **λ** se, e somente se, PC < r.

Logo, $PC^2 < r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \Rightarrow$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 < 0$$

iii) **P** é exterior a **λ** se, e somente se, PC > r.

Logo, $PC^2 > r^2 \Leftrightarrow (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \Rightarrow$

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 > 0$$

Exemplos

1º) Dada a circunferência (λ) $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$, qual é a posição, em relação a **λ**, do ponto A(3, 1)?

Resolução:

Substituindo-se as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de **λ**, tem-se:

$3^2 + 1^2 + 2.3 - 2.1 - 7 = 7 > 0$

Portanto, **C** é exterior a **λ**.

2º) Dada a circunferência (λ) $x^2 + y^2 = 1$, qual é a posição, em relação a **λ**, do ponto A(0, –1)?

Resolução:

Substituindo as coordenadas de **A** no 1º membro da equação de **λ**, tem-se:

$0^2 + (-1)^2 - 1 = 0$

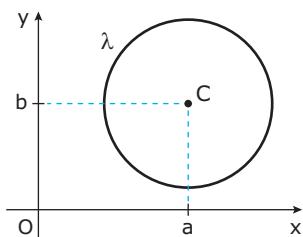
Portanto, **A** pertence a **λ**.

LUGARES GEOMÉTRICOS DE PONTOS

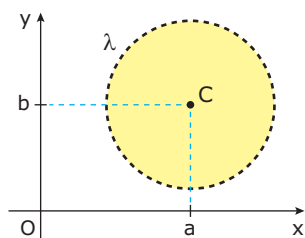
Considerada uma circunferência **λ** de centro C(a, b) e raio **r**,

i) os pontos que satisfazem a equação

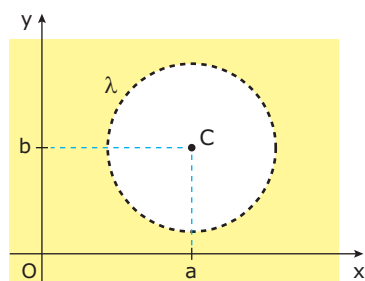
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$$

são os pontos de **λ**.

ii) os pontos que satisfazem a inequação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 < r^2$$

são os pontos interiores a **λ**.

iii) os pontos que satisfazem a inequação

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 > r^2$$

são os pontos exteriores a **λ**.

Exemplos

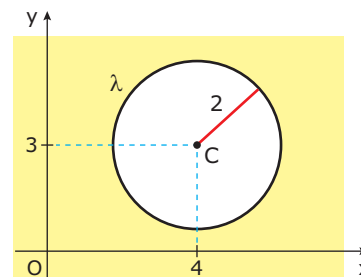
1º) Representar graficamente: $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 21 \geq 0$

Resolução:

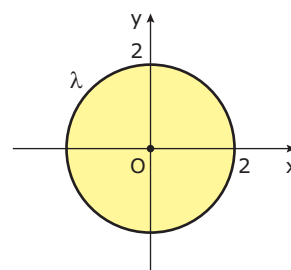
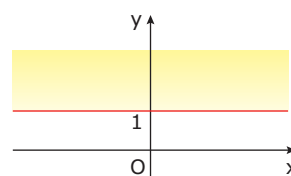
$(x^2 - 8x + ...) + (y^2 - 6y + ...) \geq -21 \Rightarrow$

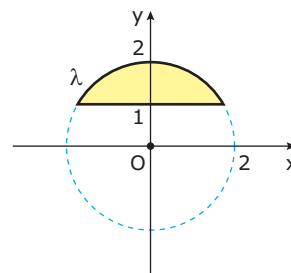
$(x^2 - 8x + 16) + (y^2 - 6y + 9) \geq -21 + 16 + 9 \Rightarrow$

$(x - 4)^2 + (y - 3)^2 \geq 4$

que representa os pontos da circunferência de centro (4, 3) e raio 2 e os pontos exteriores a ela.

2º) Representar, graficamente: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \geq 1 \end{cases}$

Resolução:

$x^2 + y^2 \leq 4$ é representada pelos pontos da circunferência de centro (0, 0) e raio 2 e pelos pontos interiores a ela.

$y \geq 1$ é representada pelos pontos de ordenada 1 e pelos pontos de ordenada maior que 1.

Portanto, o segmento circular a seguir é a representação dos pontos que satisfazem a $x^2 + y^2 \leq 4$ e a $y \geq 1$.

MATEMÁTICA

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE DUAS CIRCUNFERÊNCIAS

Dadas duas circunferências de centros C_1 e C_2 e raios r_1 e r_2 ($r_1 \geq r_2$), sabemos, da geometria plana, que:

1º caso

$d(C_1, C_2) = r_1 + r_2 \Rightarrow$ circunferências tangentes exteriormente.

2º caso

$d(C_1, C_2) = r_1 - r_2 \Rightarrow$ circunferências tangentes interiormente.

3º caso

$r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2 = \Rightarrow$ circunferências secantes.

4º caso

$d(C_1, C_2) > r_1 + r_2 \Rightarrow$ circunferências exteriores.

Caso especial

$d(C_1, C_2) = 0 \Rightarrow$ circunferências concêntricas.

Exemplos

1º) $\lambda_1: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 2 \end{cases}$

$\lambda_2: x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2(1, 1) \\ r_2 = \sqrt{2} \end{cases}$

Resolução:

$d(C_1, C_2) = 1 \Rightarrow r_1 - r_2 < d(C_1, C_2) < r_1 + r_2$

$(2 - \sqrt{2} < 1 < 2 + \sqrt{2})$

$\Rightarrow$ Circunferências secantes

2º) $\lambda_1: (x - 1)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} C_1(1, 0) \\ r_1 = 1 \end{cases}$

$\lambda_2: (x - 4)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} C_2(4, 0) \\ r_2 = 2 \end{cases}$

Resolução:

$d(C_1, C_2) = 3 \Rightarrow d(C_1, C_2) = r_1 + r_2$

$(3 = 1 + 2)$

$\Rightarrow$ Circunferências tangentes exteriormente

EXERCÍCIOS DE FIXAÇÃO

01. (UEL-PR) Seja **P** um ponto do eixo das ordenadas pertencente à reta de equação $2x - 3y - 6 = 0$. A equação da circunferência de centro em **P** e tangente ao eixo das abscissas é

A) $x^2 + y^2 = 4$

B) $x^2 + y^2 + 4x = 0$

C) $x^2 + y^2 + 4y = 0$

D) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

E) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

02. (FUVEST-SP) A reta $y = mx$ $(m > 0)$ é tangente à circunferência $(x - 4)^2 + y^2 = 4$. O seno do ângulo que a reta forma com o eixo **x** vale

A) $\frac{1}{5}$

B) $\frac{1}{2}$

C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

E) $\sqrt{5}$

03. (UFPR) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 - 25 = 0$, no ponto $P(3, 4)$, é

A) $-3x + 4y - 7 = 0$

B) $3x + 4y + 25 = 0$

C) $3x - 4y + 7 = 0$

D) $4x + 3y - 24 = 0$

E) $3x + 4y - 25 = 0$

04. (UFRGS) Os raios das circunferências tangentes aos eixos coordenados e que contêm o ponto (1, 2) são

A) 1 e 2

B) 1 e 5

C) 2 e 3

D) 2 e 5

E) 3 e –5

05. (UFOP-MG) A equação da circunferência de centro $P(3, 1)$ e tangente à reta **r**: $3x + 4y + 7 = 0$ é

A) $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 6 = 0$

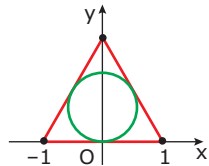
B) $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

C) $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

D) $x^2 + y^2 + 2y - 6x - 6 = 0$

E) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

01. (UFRGS) Considere a circunferência inscrita no triângulo equilátero, conforme mostra a figura.

A equação da circunferência é

A) $x^2 + (y - 1)^2 = 1$

B) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

C) $x^2 + \left(y - \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$

D) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}$

E) $x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

02. (UFPE) Assinale a alternativa que corresponde à equação de circunferência cujo raio mede 2 e que tangencia os dois semieixos positivos.

A) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

B) $5x^2 + 5y^2 - 80x - 80y + 320 = 0$

C) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$

D) $2x^2 + 2y^2 + 3x - 3y + 7 = 0$

E) $x^2 + y^2 + 8 = 0$

03. (FUVEST-SP) Uma reta passa pelo ponto P(1, 3) e é tangente à circunferência de centro C(1, 1) e raio 1 num ponto **T**. Então, a medida do segmento PT é

A) $\sqrt{3}$

B) 2

C) $\sqrt{5}$

D) $\sqrt{6}$

E) $\sqrt{7}$

04. (PUC-SP) A circunferência com centro na origem e tangente à reta 3x + 4y = 10 tem equação

A) $x^2 + y^2 = 1$

B) $x^2 + y^2 = 2$

C) $x^2 + y^2 = 3$

D) $x^2 + y^2 = 4$

E) $x^2 + y^2 = 5$

05. (UNESP) Seja

$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 \leq 16 \text{ e } x^2 + (y - 1)^2 \geq 9\}$

uma região do plano. A área de **S** é

A) 5

B) 7

C) 5π

D) 7π

E) $7\pi^2$

06. (UFC–2008) O número de pontos na interseção dos subconjuntos do plano cartesiano

$r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -x + y + 1 = 0\}$ e

$c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0\}$ é

A) 0

B) 1

C) 2

D) 3

E) 4

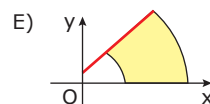
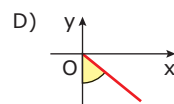
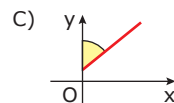
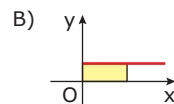
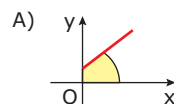
07. (UFJF-MG) Considere as circunferência C_1 e C_2 de equações $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ e $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, respectivamente. É **CORRETO** afirmar que

A) C_1 é tangente ao eixo das abscissas.

B) C_1 e C_2 se interceptam em um único ponto.

C) C_1 e C_2 se interceptam em dois pontos.

D) C_1 e C_2 não se interceptam.

08. (FUVEST-SP) Das regiões hachuradas na sequência, a que **MELHOR** representa o conjunto dos pontos (x, y), do plano cartesiano, satisfazendo ao conjunto de desigualdades $x \geq 0$; $y \geq 0$; $x - y + 1 \geq 0$; $x^2 + y^2 \leq 9$, é

A)
B)
C)
D)
E)
09. (UFRN) No sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, a equação da tangente à circunferência $x^2 + y^2 = 1$, no ponto $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, é

A) $y = x + \sqrt{2}$

B) $y = x - \sqrt{2}$

C) $y = -x + \sqrt{2}$

D) $y = -x - \sqrt{2}$

E) $y = 2x + \sqrt{2}$

MATEMÁTICA

10. (FEI-SP) O comprimento da corda que a reta $x + y = 3$ determina na circunferência de centro (2, 1) e raio $\frac{5}{\sqrt{2}}$ é

A) $\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{2}$
C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$
E) $5\sqrt{2}$

11. (UFC–2010) Em um sistema cartesiano de coordenadas, o valor positivo de **b** tal que a reta $y = x + b$ é tangente ao círculo de equação $x^2 + y^2 = 1$ é

A) 2
B) 1
C) $\sqrt{2}$
D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
E) 3

12. (UFSM-RS) A reta $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ é tangente a uma circunferência de centro (2, 0). O raio dessa circunferência é

A) 0,5
B) 1
C) $\sqrt{3}$
D) 2
E) 3

13. (PUCPR) As interseções das retas de equações $|y| = 3$ e $|x - 2| = 3$ delimitam um quadrado em que está inscrita uma circunferência cuja equação é

A) $x^2 + y^2 = 9$
B) $x^2 + y^2 - 4x - 4 = 0$
C) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$
D) $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$
E) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$

SEÇÃO ENEM

01. Um emblema de uma bandeira de uma escola de samba é uma figura geométrica definida por $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 9 \leq 0$ quando projetada em um plano cartesiano com **x** e **y** dados em metros. Esse emblema será pintado em duas cores separadas pela reta $y = x$. A região acima da reta será pintada de verde, e a região abaixo será pintada de rosa. Considerando que a escola de samba pretende confeccionar 100 dessas bandeiras e que uma lata de tinta cobre 4 m^2 do emblema, determine a quantidade mínima de latas de tinta rosa a serem utilizadas. Adote $\pi = 3,14$.

A) 225
B) 320
C) 354
D) 450
E) 500

02. Um ex-marido foi proibido pela Justiça de se aproximar da ex-mulher, devendo manter uma distância fixa mínima de sua residência, localizada na origem do sistema cartesiano. A região que melhor representa os pontos proibidos para o ex-marido se localizar é

A)
D)
B)
E)
C)
GABARITO

Fixação

01. C
02. B
03. E
04. B
05. B

Propostos

01. E
02. A
03. A
04. D
05. D
06. A
07. D
08. A
09. A
10. E
11. C
12. B
13. C

Seção Enem

01. C
02. C